KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Onsdag 17/3 2010, kl 14-17

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från vt-09 (senare hälften) ht-09 eller vt-10, och den kursomgång (linje, termin) där poängen erhållits

(2p) **1.** Ekvationen $(2-x)^2 + \ln(x) - 1.1 = 0$ skall lösas med Newtons metod. Om startvärdet $x_0 = 1$ används vad blir nästa iterat x_1?

- ☐ 0
- ☐ 0.9
- ☐ 1.0
- ☐ 1.1
- ☐ något annat

(3p) **2.** Givet differentialekvationen $y' = x - y^2, y(1) = 1$ Antag att vi vill beräkna approximationer till $y(1.1)$ och $y(1.2)$ genom att använda Eulers metod med steget $h = 0.1$.

Vad blir Eulerapproximationen till $y(1.1)$? (1.5p)

- ☐ 0.9
- ☐ 1.0
- ☐ 1.02
- ☐ 1.1
- ☐ något annat

Samma fråga för $y(1.2)$? (1.5p)

- ☐ 1
- ☐ 1.01
- ☐ 1.02
- ☐ 1.9
- ☐ något annat

(2p) **3.** Givet (x, y)-värdena $(0, 1)$, $(1, 1)$ och $(2, 0)$. Vilket av nedanstående polynom interpolerar dessa värden?

- ☐ $y = -x + 2$
- ☐ $y = 1 + x/2 - x^2/2$
- ☐ $y = -x/2 + 1$
- ☐ $y = 1 - x/2 + x^2/2$

(3p) **4.** Givet en ekvation $f(x) = 0$, där roten $\alpha \approx 1$. Newtons metod $x_{n+1} = x_n - \delta x_n$, där $\delta x_n = f(x_n)/f'(x_n)$ används.

Vilka storheter går mot noll då metoden konvergerar mot roten α? (1.5p)

- ☐ δx_n och $f(x_n)$
- ☐ δx_n och x_n
- ☐ x_n och $f'(x_n)$
- ☐ x_n och $f(x_n)$

Vad innebär kvadratisk konvergens? (1.5p)

- ☐ $\delta x_{n+1} \approx C \cdot \delta x_n$
- ☐ $\delta x_{n+1} \approx C \cdot (x_n)^2$
- ☐ $\delta x_{n+1} \approx C \cdot (\delta x_n)^2$
- ☐ $(\delta x_{n+1})^2 \approx C \cdot \delta x_n$

(2p) **5.** Trapetsvärdet $T(h)$ (där h är steglängden) för beräkning av en integral $I = \int_a^b f(x)dx$ har noggrannhetsordningen två. Detta innebär

- ☐ Integralen kan skrivas om som en andra ordningens differentialekvation
- ☐ Felet $\epsilon(h) = T(h) - I$ är i stort sett proportionellt mot h^2.
- ☐ Felet avtar enligt $\epsilon(h/2) = C(\epsilon(h))^2$.
- ☐ Resultatet av beräkningen blir ett polynom av andra graden.
- ☐ Felet avtar med en faktor 2 då steglängden halveras.

(3p) **6.** En rät linje $y = kx + m$ ska anpassas till (x, y)-punkterna $(-1, 1)$, $(0, 0)$ och $(1, 2)$ i minsta kvadratmetodens mening.

Vad blir k och m? (2p)

- ☐ $k = 0.5, m = 1$
- ☐ $k = 0.5, m = 0$
- ☐ $k = 1, m = 0.5$
- ☐ $k = 0, m = 0.5$
- ☐ $k = 1, m = 1$

Vad blir residualvektorn? (1p)

- ☐ $(0.5, -1, 0.5)^T$
- ☐ $(1, 0, -1)^T$
- ☐ $(1, -1)^T$
- ☐ $(1.5, -0.5, 0.5)^T$
- ☐ $(0, 0, 0)^T$

(2p) **7.** Man vill lösa ett randvärdesproblem $u''(x) = f(x), u(0) = 1, u(1) = 0, 0 \leq x \leq 1$ genom att använda FDM (finita differensmetoden) med centraldifferens och steget $h = 0.1$. Om randvillkoren sätts in i de ekvationer som erhålles då FDM tillämpas erhålles ett linjärt ekvationssystem $Au = b$.

Vilken dimension har matrisen A?

- ☐ 12×12
- ☐ 10×9
- ☐ 9×9
- ☐ 8×8

Vilken struktur har matrisen A?

- ☐ diagonal
- ☐ tridiagonal
- ☐ triangulär
- ☐ fylld

(3p) **8.** Differentialekvationssystemet

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (\frac{dy}{dx})^2 + z^2 + x - 5, \quad \frac{dz}{dx} = -z + 2(\frac{dy}{dx})^2 - 1$$

skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (2p)

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ det är omöjligt att säga.

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ det är omöjligt att säga.

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243
Onsdag 17/3 2010, kl 14-17

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(15p) **1.** Givet följande icke-linjära ekvationssystem:

$$x^3 + 10x = y + 5, \qquad x + y^3 = 10y - 1 \qquad (*)$$

a) (3p) Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för ekvationssystemet.

b) (4p) Motivera varför $x = 0.5, y = 0.15$ är en bra startgissning.

c) (4p) Formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen.

d) (4p) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-program som löser $(*)$ med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-6} i varje komponent av lösningen. För varje iteration ska bägge komponenterna och deras korrektioner skrivas ut.

(20p) **2.** Givet följande differentialekvationsproblem

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - C(\frac{dy}{dt})^2$$

Parametrarna m, g och C har alla positiva värden.

a) (3p) Skriv om differentialekvationen som ett system på vektorform av första ordningen.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

b) (12p) Antag att vi har begynnelsevärden $y(0) = 1$ och $\frac{dy}{dt}(0) = 1$. Vi vill beräkna den tidpunkt T då $y(T) = 0$.
Skissera en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-prgram, som med Eulers metod ger en lösningskurva (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), ... fram till det t_i-värde, där $y_i < 0$ för första gången. Detta t_i-värde ger en grov approximation till T. Som siffervärden på parametrarna används: $m = 1$, $g = 9.81$, och $C = 0.03$. Steglängden h väljs till $h = 0.01$. Lösningskurvan ska plottas.

c) (5p) Utöka algoritmen i b) så att tidpunkten T bestäms noggrannare med hjälp av linjärinterpolation genom att använda de två sista punkterna på lösningskurvan i b).

(15p) **3.** Betrakta sambandet

$$\int_0^1 \frac{e^{-kx^2}}{1 + x^2} dx = 0.75$$

Strukturera en algoritm för numerisk beräkning av parametern k. Vilka delproblem behöver lösas och vilka numeriska metoder är lämpliga? Inför lämpliga beteckningar och formulera en algoritm. Programkod behövs EJ! Diskutera hur trunkeringsfelen i metoderna bidrar till en felgräns för det som söks.