KTH-CSC **Namn:**
H Eriksson **Personnr:** **Program, årskurs:**

## Tentamen i DN1241 och andra Numeriska metoder gk, lördag 24 okt 2009 14–17

**DEL 1** Inga hjälpmedel. För godkänt krävs 14p på denna del, inräknat bonus.

(2p) **1.** För att kolla cocacolaburkars verkliga innehåll häller man tio stycken i ett mätkärl och avläser 4872.0 ml plus minus en halv milliliter. Om man nu anger den genomsnittliga burkens innehåll till 487.20 ml vad vet man då om ...

... absoluta felet?

- ☐ Cirka 0.05.
- ☐ Cirka 0.5.
- ☐ Cirka 5.
- ☐ Man vet ingenting.

... antalet korrekta siffror?

- ☐ Cirka tre.
- ☐ Cirka fyra.
- ☐ Cirka fem.
- ☐ Man vet ingenting.

(2p) **2.** Minstakvadratanpassning av uttrycket $a + b \sin x + c \cos x$ till sex givna punkter leder till ekvationssystemet $\mathbf{Ac} = \mathbf{y}$.

Hur stor är $\mathbf{A}$ (rad×kol)?

- ☐ Sex gånger $2\pi$.
- ☐ Tre gånger sex.
- ☐ Fyra gånger sex.
- ☐ Sex gånger tre.

Vad blir högerledet i normalekvationerna?

- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{y}$
- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{c}$
- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- ☐ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$

(2p) **3.** Man undviker interpolation med niondegradspolynom.

Varför?

- ☐ Svängningsfenomen.
- ☐ Residualer.
- ☐ Sämre anpassning.
- ☐ Dålig kondition.

Vad är att föredra?

- ☐ Kvadratisk interpolation.
- ☐ Styckvisa tredjegradspolynom.
- ☐ Richardsonextrapolation.
- ☐ Trigonometriska polynom.

(4p) **4.** Ekvationen $x^3 = 2x + 1$ har en rot mellan 1 och 2 som ska bestämmas iterativt. Vad ger en iteration med $x_0 = 2$ och ...

... Newton-Raphson.

- ☐ 1.4
- ☐ 1.5
- ☐ 1.6
- ☐ 1.7

... $x_1 = 1$ och sekantmetoden.

- ☐ 1.4
- ☐ 1.5
- ☐ 1.6
- ☐ 1.7

(2p) **5.** Om man roterar kurvan $f(x) = (3 + \cos^2 x)/(4 + \sqrt{x})$, $0 \leq x \leq 5$ får man en cocacolaflaska. Vilken metod kan användas för …

… beräkning av volymen?

- ☐ Simpsons formel
- ☐ Minstakvadratmetoden
- ☐ Hermiteinterpolation

… approximation med polynomkurva?

- ☐ Simpsons formel
- ☐ Minstakvadratmetoden
- ☐ Hermiteinterpolation

(2p) **6.** Differentialekvationen $y'' = 4\cos(2\pi t) - 3y - ty' - 11y^3$ ska skrivas om för att lösas med Runge-Kuttas metod från $t = 0$ till $t = 3.2$ med steget $h = 0.2$

Hur många diffekvationer blir det?

- ☐ Två
- ☐ Tre
- ☐ Sexton
- ☐ Sjutton

Hur många startvärden krävs vid $t = 0$?

- ☐ Två
- ☐ Tre
- ☐ Sexton
- ☐ Sjutton

(2p) **7.** Du råkar ut för ett ickelinjärt ekvationssystem med tre obekanta. Vilken metod är användbar om …

… antalet ekvationer är tre?

- ☐ Eulers metod
- ☐ Newtons metod
- ☐ Hermites metod

… antalet ekvationer är tio?

- ☐ Gauss-Newtons metod
- ☐ Runge-Kuttas metod
- ☐ Sekantmetoden

(4p) **8.** Vad ger trapetsregeln med steget $h = \pi/6$ för värde på

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

Som bekant är $\cos \pi/3 = 1/2$ och $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ (eller möjligen tvärtom).

- ☐ $\frac{\pi}{6}(2 + \sqrt{3})$
- ☐ $\frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}/2)$
- ☐ $\pi/2$
- ☐ $\frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3})$

# Tentamen i DN1241 och andra Numeriska metoder gk, lördag 24 okt 2009 14-17

**DEL 2** Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40 A.

**1.** *Rekordpumpa*

Varje år kungörs årets rekordpumpa i tidskriften Pumpavännen. Tyvärr är vårt exemplar för år 2007 sönderläst, vi behöver din hjälp att ta reda på hur många kg rekordpumpan vägde då.

| År | 2005 | 2006 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|
| Rekordvikt i kg | 200 | 208 | 254 | 286 |

(6p) **a)** Bestäm det tredjegradspolynom som går genom punkterna. Använd en smart ansats och handräkna fram polynomkoefficienterna och pumparekordet år 2007. (Se baksidan!)

(5p) **b)** Använd naiva ansatsen för polynomet och visa en algoritm för beräkning och uppritning av tredjegradspolynomet i intervallet 2004 – 2010.

**2.** *Släpptest för pumpor*

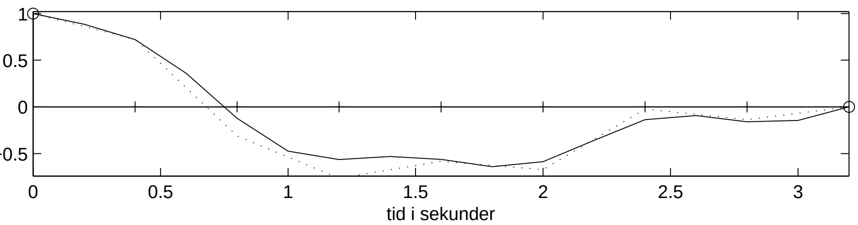
Halloweenpumpor genomgår fallprov. Vid tiden $t = 0$ släpps de från en meters höjd, $y = 1$, mot en elastisk testmatta. Efter exakt 3.2 sekunder ska pumpan ha studsat tillbaka till $y = 0$. Pumpans rörelse bestäms av differentialekvationen

$$y'' = 4\cos(2\pi t) - 3y - ty' \text{ med } y(0) = 1,\ y(3.2) = 0.$$

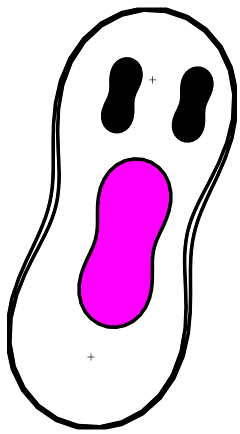
Figuren visar lösningen $y(t)$ då finitadifferensmetoden utnyttjas med dels åtta dels sexton delintervall.

(9p) **a)** Härled för fallet åtta delintervall det ekvationssystem som uppstår för beräkning av $y$-värdena. Hur många ekvationer erhålls?

(7p) **b)** Skriv ett matlabprogram som beräknar och skriver ut figurens fallprovskurvor.




**3.** *Spökpumpor av Cassiniovaler*



Pumpor finns av alla former. Läskigast är kanske spökpumpan som reser sig igen om man lägger den ner. (Den ena änden är ihålig.) Formen är en Cassinioval som definieras av två punkter A och B (plusmarkerade i spökpumpan) och att avstånden från en punkt P på ovalen till A och B ska ha en given produkt $q$. En Cassinioval med centrum i origo och A=$(a,\ b)$ och B=$(-a,\ -b)$ har följande ekvation:

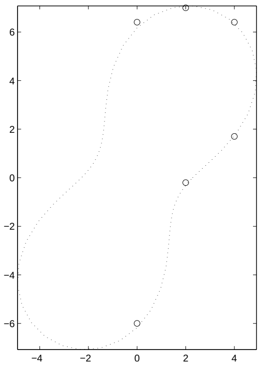
$$(x^2 + y^2 + a^2 + b^2)^2 - 4(ax + by)^2 = q^2.$$

*Spännande fortsättning på nästa sida!*

På en plötsligt uppdykande spökpumpa har man lyckats mäta upp följande sex punkter:

(13p)

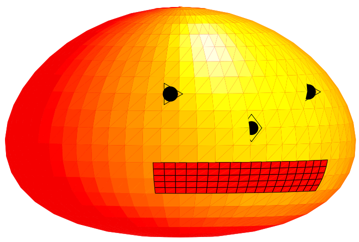
| $x$ | 0 | 2 | 4 | 4 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -6.0 | -0.2 | 1.7 | 6.4 | 7.0 | 6.4 |




Det gäller att bestämma parametrarna $a$, $b$, $q$ i denna spökande Cassinioval så att bästa approximation erhålls (i minstakvadratmetodens mening).
Beskriv så fullständigt som möjligt (gärna i Matlab) en algoritm som utför detta. Värdet på $q$ är cirka 30. Ge själv lämpliga startgissningar till $a$ och $b$.

**4.** *Halloweenpumpa 2009*

Årets Halloweenpumpa har en kontur som är skapad av en kubisk bézierkurva i ett vertikalplan. Pumpan bildas då kurvan roteras kring $z$-axeln.
Bézierkurvan startar i origo och slutar på $z$-axeln på höjden 8. Start- och slutriktning är horisontella, nedre styrpunktsavståndet är 10 och det övre är 6 längdenheter.



(6p) **a)** Visa en konstruktionsfigur för pumpakonturen och markera punkten $\mathbf{r}(1/2)$. Vad är koordinaterna för denna punkt och vad är kurvlutningen där? (Bör kunna avläsas ur din konstruktionsskiss!)

(4p) **b)** Skriv en algoritm för uppritning av pumpans konturkurva.

Obs! Om avsnittet om bézierkurvor inte har ingått i din nummekurs kan du få hämta ut en alternativ uppgift 4.

---

Utdrag ur formelsamlingen:

**- - -**

Det $(n-1)$-gradspolynom som går genom $n$ givna punkter bestäms med *naiva ansatsen* $P(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ (ger fyllt system) eller bättre med *Newtons ansats* $P(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + \ldots$, som ger triangulärt system.

**- - -**

Derivator approximeras med differenskvoter, t ex med *centraldifferenskvoten* för första och andra derivatan:

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - y(t_{i-1})}{2h}, \quad y''(t_i) \approx \frac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1})}{h^2},$$

(där $t_{i+1} = t_i + h$) båda med felutvecklingen $c_2h^2 + c_4h^4 + c_6h^6 \cdots$ .

**- - -**

En *kubisk bézierkurva* har två styrpunkter, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$, och formeln

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_1 + 3t(1-t)^2\mathbf{b} + 3t^2(1-t)\mathbf{c} + t^3\mathbf{p}_2, \; 0 \le t \le 1.$$

KTH-CSC **Namn:**
H Eriksson **Personnr:** **Program, årskurs:**

## Tentamen i DN1241 och andra Numeriska metoder gk, lördag 24 okt 2009 14–17

**DEL 1** Inga hjälpmedel. För godkänt krävs 14p på denna del, inräknat bonus.

(2p) **1.** För att kolla cocacolaburkars verkliga innehåll häller man tio stycken i ett mätkärl och avläser 4872.0 ml plus minus en halv milliliter. Om man nu anger den genomsnittliga burkens innehåll till 487.20 ml vad vet man då om ...

... absoluta felet?

- [x] Cirka 0.05.
- [ ] Cirka 0.5.
- [ ] Cirka 5.
- [ ] Man vet ingenting.

... antalet korrekta siffror?

- [ ] Cirka tre.
- [x] Cirka fyra.
- [ ] Cirka fem.
- [ ] Man vet ingenting.

(2p) **2.** Minstakvadratanpassning av uttrycket $a + b\sin x + c\cos x$ till sex givna punkter leder till ekvationssystemet $\mathbf{Ac} = \mathbf{y}$.

Hur stor är $\mathbf{A}$ (rad×kol)?

- [ ] Sex gånger $2\pi$.
- [ ] Tre gånger sex.
- [ ] Fyra gånger sex.
- [x] Sex gånger tre.

Vad blir högerledet i normalekvationerna?

- [x] $\mathbf{A}^T\mathbf{y}$
- [ ] $\mathbf{A}^T\mathbf{c}$
- [ ] $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- [ ] $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$

(2p) **3.** Man undviker interpolation med niondegradspolynom.

Varför?

- [x] Svängningsfenomen.
- [ ] Residualer.
- [ ] Sämre anpassning.
- [ ] Dålig kondition.

Vad är att föredra?

- [ ] Kvadratisk interpolation.
- [x] Styckvisa tredjegradspolynom.
- [ ] Richardsonextrapolation.
- [ ] Trigonometriska polynom.

(4p) **4.** Ekvationen $x^3 = 2x + 1$ har en rot mellan 1 och 2 som ska bestämmas iterativt. Vad ger en iteration med $x_0 = 2$ och ...

... Newton-Raphson.

- [ ] 1.4
- [ ] 1.5
- [ ] 1.6
- [x] 1.7

... $x_1 = 1$ och sekantmetoden.

- [x] 1.4
- [ ] 1.5
- [ ] 1.6
- [ ] 1.7

(2p) **5.** Om man roterar kurvan $f(x) = (3 + \cos^2 x)/(4 + \sqrt{x})$, $0 \leq x \leq 5$ får man en cocacolaflaska. Vilken metod kan användas för ...

...beräkning av volymen?

- [x] Simpsons formel
- [ ] Minstakvadratmetoden
- [ ] Hermiteinterpolation

...approximation med polynomkurva?

- [ ] Simpsons formel
- [x] Minstakvadratmetoden
- [ ] Hermiteinterpolation

(2p) **6.** Differentialekvationen $y'' = 4\cos(2\pi t) - 3y - ty' - 11y^3$ ska skrivas om för att lösas med Runge-Kuttas metod från $t = 0$ till $t = 3.2$ med steget $h = 0.2$

Hur många diffekvationer blir det?

- [x] Två
- [ ] Tre
- [ ] Sexton
- [ ] Sjutton

Hur många startvärden krävs vid $t = 0$?

- [x] Två
- [ ] Tre
- [ ] Sexton
- [ ] Sjutton

(2p) **7.** Du råkar ut för ett ickelinjärt ekvationssystem med tre obekanta. Vilken metod är användbar om ...

...antalet ekvationer är tre?

- [ ] Eulers metod
- [x] Newtons metod
- [ ] Hermites metod

...antalet ekvationer är tio?

- [x] Gauss-Newtons metod
- [ ] Runge-Kuttas metod
- [ ] Sekantmetoden

(4p) **8.** Vad ger trapetsregeln med steget $h = \pi/6$ för värde på

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

Som bekant är $\cos \pi/3 = 1/2$ och $\cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ (eller möjligen tvärtom).

- [ ] $\frac{\pi}{6}(2 + \sqrt{3})$
- [ ] $\frac{\pi}{6}(1 + \sqrt{3}/2)$
- [x] $\pi/2$
- [ ] $\frac{\pi}{6}(3 + \sqrt{3})$