KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**.................

DN12- 12, 14, 15, 40, 41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk

Lördagen den 22 augusti 2009, kl. 9.00 - 12.00

DEL 1, 20p Inga hjälpmedel.
Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E. OBS! För bonuspoäng ange termin och år!

(1p) **1.** A är en tridiagonal matris med dimensionen 20×20. För en sådan matris gäller att

- ☐ matrisens element under huvuddiagonalen är noll
- ☐ den inte kan inverteras
- ☐ $A = A^T$
- ☐ den är gles

(2p) **2.** Då man interpolerar mätpunkter med ett polynom av högre grad n kan man råka ut för Runges fenomen. Vad innebär det?

- ☐ kraftiga oscillationer hos interpolationspolynomet kan erhållas
- ☐ felkvadratsumman blir noll
- ☐ mätpunkterna ligger på en rät linje
- ☐ randvillkoren är ej uppfyllda

3.

x	0	1	2
y	2	0	-2

En linje anpassas med hjälp av minstakvadratmetoden till punkterna i tabellen via det överbestämda systemet $Ac \approx y$.

a) (1p) Vilken dimension har matrisen A?

- ☐ 2 rader, 3 kolumner
- ☐ 3 rader, 3 kolumner
- ☐ 3 rader, 2 kolumner
- ☐ 2 rader, 2 kolumner

b) (2p) Felkvadratsumman blir:

- ☐ $(0.25 \quad -0.25 \quad 0.5)$
- ☐ 2.25
- ☐ 0
- ☐ $(0.25 \quad 0.25 \quad 0.5)$
- ☐ 1
- ☐ 0.375

c) (1p) Hur många ekvationer har normalekvationerna i detta fall?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

Var god vänd!

(2p) **4.** Vid iteration för rotfinnande erhålls följande sekvenser av korrektionstermer (avrundade till 4 decimaler)

0.1000	0.0800	0.0410	0.0055

Konvergensen sägs då vara

- ☐ divergent
- ☐ linjär
- ☐ kvadratisk
- ☐ oregelbunden
- ☐ kubisk
- ☐ inget av ovanstående alternativ beskriver konvergensen

(2p) **5.** Integralen $I = \int_0^1 f(x)dx$ där $f(x) = 10\frac{2x+3}{10x^2+5x+5} - 2$ ska approximeras med hjälp av trapetsregeln och två delintervall.

Då erhålls värdet

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3.25
- ☐ 2.125
- ☐ 1.5
- ☐ inget av ovanstående

(2p) **6.** **a.** Vad blir nästa iterationsvärde med Newton-Raphsons metod om ekvationen är $f(x) = 10\frac{2x+3}{10x^2+5x+5} - 2$ och startvärdet är 0?

- ☐ 0.5
- ☐ 1
- ☐ 1.25
- ☐ 1.5
- ☐ 1.75
- ☐ 2

(2p) **b.** Newton-Raphsons metod sägs ha kvadratisk konvergens. Det innebär att

- ☐ $f''(x_n) = {x_n}^2$
- ☐ Jacobianen är inverterbar
- ☐ felkvadratsumman minskar i varje iterationssteg med faktor 2
- ☐ $\frac{h_{n+1}}{h_n} \approx (10^{-n})^2$
- ☐ beräkningsfelet minskar i varje iterationssteg
- ☐ inget av ovanstående alternativ beskriver konvergensen

Var god vänd!

(2p) **7.** Den ordinära differetialekvationen $y' = 2x + y$ har lösts med Eulers metod och bland annat resulterat i att $y_3 = 2$ då $x_3 = 1$. Vad blir y_5 då $h = 0.5$ med Eulers metod?

- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 6.25
- ☐ 7.25
- ☐ 6.5
- ☐ 7.5

(1p) **8.** Vilken noggrannhetsordning har Eulers metod?

- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 4

(2p) **9.** Den ordinära differentialekvationen $\frac{d^2y}{dt^2} = 10y$ ska lösas i intervallet $0 \leq t \leq 5$. Vilket svarsalternativ är nödvändigt för att det ska vara ett lösbart begynnelsvärdesproblem?

- ☐ $y(0) = 1$ och $y(5) = 1$
- ☐ $y(0) = 1$ och $y'(5) = 1$
- ☐ $y'(0) = 1$ och $y(0) = 1$
- ☐ Inget av ovanstående alternativ besvarar frågan

Lycka till!

DN12- 12, 14, 15, 40, 41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk
Lördagen den 22 augusti 2009, kl. 9.00 - 12.00

DEL 2, 50p Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd.
Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(12p)

1. Ekvationerna

$$\begin{cases} 100\,x + sin(100y) = 3xy - 100 \\ \cos(xy) + 100y - 100 = 0 \end{cases}$$

vill man lösa med hjälp av Newtons metod och startvärdena $x = -1$ samt $y = 1$.

a) Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för ekvationsproblemet så att det kan lösas.

b) Undersök om startvärdena fungerar eller om nya måste väljas. Motivera noga varför de givna OCH även eventuellt ditt val av startvärden fungerar/inte fungerar.

c) Ställ upp beräkningar med siffervärden för den första iterationen (du behöver inte räkna ut resultaten).

d) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program, som löser ekvationsproblemet. Felet ska vara mindre än 10^{-4} i varje komponent av lösningen. I varje beräkningssteg ska lösningens komponenter skrivas ut.

(16p)

2. Man vill lösa följande differentialekvationssystem

$$\begin{cases} y' = \frac{sin(\pi x)+z}{y^2+z^2} \\ \\ z' = \frac{cos(y)}{y^2+z^2} \end{cases}$$

med tillhörande villkor $y(x_0) = 1$ och $z(x_0) = 2$ där $x_0 = 0$.

a) Skissera en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program, som löser ODE:n. ODE:n ska lösas med Matlabfunktionen ode45 på intervallet $0 \leq x \leq 10$. Lösningskurvorna för $y(x)$ och $z(x)$ ska plottas för $0 \leq x \leq 10$ och $y(10)$ respektive $z(10)$ ska skrivas ut. Typ av anropssats for ode45:

$$[tout, uout] = ode45('rhs', [t0, tslut], u0)$$

(I stället för $'rhs'$ kan man använda @rhs)

b) Utöka programmet och beräkna $I = \int_{x_{limit}}^{10} \sqrt{1 + (y')^2}dx$. Observera integrationsgränserna! x_{limit} är det minsta värdet på x där $y(x) > z(x)$ gäller i intervallet $0 \leq x \leq 10$.

Var god vänd sida!

(10p)

3. Trapetsregeln har vid beräkningar gett resultaten $T(h)$ och $T(2h)$. Med hjälp av feltermskorrektion kan ett bättre värde beräknas med

$$\hat{T}(h) = T(h) + \frac{T(h) - T(2h)}{3}$$

så kallad Richardsonextrapolation.

a) Härled formlen för $\hat{T}(h)$ ovan.
b) Visa vilken noggrannhetsordning som gäller för $\hat{T}(h)$.

(12p)

4. Följande mätpunkter har erhållits

x	2	4	6
y	6	10	-18

a) Interpolera ett polynom till dessa punkter.

b) En ny punkt $(1, 7)$ läggs till de övriga. Interpolera ett polynom till dessa 4 punkter.

c) Om den nya punktens y-värde störs med ± 0.5, hur mycket påverkas då polynomets koefficienter? Interpolation genom de 4 punkterna avses.

Lycka till!