KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN1240, Tentamen i Numeriska metoder för OPEN-1, 09-05-14, kl 13-16

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E. För bonuspoäng ange termin och år

(3p) **1.** För att bestämma $\sqrt{7}$ noggrannt använder vi oss av Newton-Raphsons metod på ekvationen $x^2 - 7 = 0$.

Hur lyder iterationsformeln?

- ☐ $x_{n+1} = x_n - 7/(2x_n)$
- ☐ $x_{n+1} = x_n/2 + 7/(2x_n)$
- ☐ $x_{n+1} = x_n^2/2 + 3.5$
- ☐ $x_{n+1} = 7/x_n$
- ☐ $x_{n+1} = 7 - x_n^2 - x_n$
- ☐ på något annat sätt

Vi vet att $\sqrt{7} = 2.646$ med tre decimalers noggrannhet. Antag att vi använder startvärdet $x_0 = 2.656$, hur stort blir felet i x_2, dvs efter två iterationer?

- ☐ 10^{-3}
- ☐ 10^{-6}
- ☐ 10^{-8}
- ☐ 10^{-12}

(3p) **2.** Givet differentialekvationen $y' = xy^2, y(1) = 1$ Antag att vi vill beräkna y(3) och använder Eulers metod med steget $h = 1$.

Hur lyder rekursionsformeln?

- ☐ $y_{n+1} = y_n + hx_ny_n^2$
- ☐ $y_{n+1} = y_{n-1} + 2hx_ny_n^2$
- ☐ $y_{n+1} = 1 + hx_ny_n^2$
- ☐ $y_{n+1} = y_n + h$
- ☐ $y_{n+1} = y_n + hxy_n^2$

Vad blir Eulerapproximationen till $y(3)$?

- ☐ 4
- ☐ 6
- ☐ 8
- ☐ 10

(4p) **3.** Givet (x, y)-värdena $(1/3, 3)$, $(1/2, 2)$ och $(1, 1)$. Vi vill minstakvadratanpassa dessa värden till $y = a/x + b$, dvs bestämma a och b.

Vad blir a och b?

- ☐ $a = 1, b = 1$
- ☐ $a = 1, b = 0$
- ☐ $a = 0, b = 1$
- ☐ $a = 0, b = 0$
- ☐ något annat

Vad minimeras?

- ☐ $\sum(a + b/x_i - y_i)^2$
- ☐ $\sum(a/x_i + b - y_i)^2$
- ☐ $\sum(a/x_i + b)^2$
- ☐ $\sum(a/x_i + b - x_i)^2$
- ☐ $\sum(a + b/y_i - x_i)^2$

(2p) **4.** Givet två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Lutningen i punkterna är k_1 resp k_2. Hermiteinterpolation mellan dessa två punkter innebär att ett tredjegradspolynom $P(x)$ uppfyller

- ☐ $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, P'(x_1) = k_1$ och $P'(x_2) = k_2$.
- ☐ $P'(x_1) = y_1, P'(x_2) = y_2, P(x_1) = k_1$ och $P(x_2) = k_2$.
- ☐ $P(x_1) = y_1, P(x_1) = k_1, P(x_2) = y_2$ och $P(x_2) = k_2$.
- ☐ $P(x_1) = P(x_2), P(y_1) = P(y_2), P'(x_1) = k_1$ och $P'(x_2) = k_2$.

5. Trapetsregeln $T(h)$ för beräkning av en integral $I = \int_a^b f(x)dx$ har noggrannhetsordning
(2p) två. Detta innebär

- ☐ Integralen kan skrivas om som en andra ordningens differentialekvation
- ☐ Felet $T(h) - I$ är i stort sett proportionellt mot h^2, där h är steglängden.
- ☐ Felet avtar enligt $\epsilon_{n+1} = C\epsilon_n^2$, där ϵ_n är det fel som erhålles då $h = (b-a)/n$, där n är antalet delintervall.
- ☐ Resultatet av beräkningen blir ett polynom av andra graden.

6. En dator löser ett linjärt ekvationssystem med 100 ekvationer och 100 obekanta på 2 sekunder. Hur lång tid tar det för samma dator att lösa ett ekvationssystem med 300
(2p) ekvationer och 300 obekanta?

- ☐ $3s$
- ☐ $12s$
- ☐ $18s$
- ☐ $36s$
- ☐ $54s$

(2p) **7.** Givet $y(2) = 3, y(5) = 7$. Värdet av $y(3)$ beräknat med linjärinterpolation blir

- ☐ 4
- ☐ 13/3
- ☐ 17/3
- ☐ 5
- ☐ något annat

8. Differentialekvationssystemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(\frac{dy}{dx})^2 + (\frac{dz}{dx})^3 + x - 5, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -z + 2(\frac{dy}{dx})^2 + x^3 - 5$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer. Då blir n ...

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ det är omöjligt att säga.

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd.

(15) P1. Beskriv en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som bestämmer x och y med fel mindre än $0.5 \cdot 10^{-6}$ då

$$\begin{aligned} 20x + x^2 - y + xy &= 2 \\ x + 100y + y^4 &= 1 \end{aligned}$$

För full poäng krävs rimlig (motiverad) startgissning för såväl x som y, samt att ni formulerar detaljerna i den första iterationen. Vidare skall du beskriva hur felet kan skattas.

(15) P2. Beskriv en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som beräknar och ritar $u(t), 0 \leq t \leq 10$, där

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + \alpha u = \sin(2t); \quad u(0) = 1; u'(0) = 2;$$

Programmet skall rita lösningskurvorna för $\alpha = 1, 2, 3, 5, 9$ i samma figur, samt tabellera $u(10)$ för de olika α-värdena.

(12) P3. Givet följande mätdata (q_i, P_i):

q	94	118	147	180	230
P	10	16	25	40	60

beskriver vätskeflödet q som funktion av trycket P i munstycket av en vattenslang. Man antar att flödet q är proportionellt(okänd proportionalitetskonstant) mot någon (okänd) potens av trycket, dvs $q = aP^b$. Skissa en algoritm för bestämning av de två okända storheterna a och b. Diskutera sedan även hur man skall förfara för att avgöra om antagandet är rimligt. Algoritmbeskrivningen kan bestå av ett program eller av detaljerade välorganiserade handräkningingsskisser.

(8) P4. Givet följande tabellvärden

x	4	6	8	10
y	0	1	2	2

Bestäm det tredjegradspolynom som går genom de 4 punkterna. Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles. Skriv Matlab-satser som löser detta ekvationssystem. Lös även systemet själv och ange tredjegradspolynomet.