KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN1215 Tentamen i Numeriska metoder för ME, 09-03-13

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

1. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^4z}{dt^4} + 3\frac{dz}{dt}z^2 = \sin(t)$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir n...

- ☐ det är omöjligt att säga
- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 3.
- ☐ 4.

(2p) **2.** Minstakvadratanpassning görs av ett andragradspolynom till givna mätdata y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 vid x-värdena x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Hur många okända parametrar ska bestämmas?

- ☐ Två.
- ☐ Tre.
- ☐ Fyra.
- ☐ Fem.
- ☐ Tio.

Problemet ovan leder till ett överbestämt linjärt ekvationssystem $Ax \approx b$. Vilket påstående nedan är sant?

- ☐ Normalekvationerna lyder $A^T x = b$
- ☐ Residualvektorn definieras $r = b - x$
- ☐ Minstakvadratmetoden minimerar normen för x
- ☐ Minstakvadratmetoden minimerar Euklidiska normen för $b - Ax$.
- ☐ Om kolumnerna i A är linjärt beroende så blir normalekvationernas koefficientmatris icke-singulär.

(2p) **3.** Givet tabellen

t	0.98	0.99	1.00	1.01	1.02
f	2.664	2.691	2.718	2.746	2.773

för en funktion $f(t)$. En approximation till $f'(0.99)$ är

- ☐ 0.27
- ☐ 1
- ☐ 2.7
- ☐ 5.4

(2p) **4.** En grov approximation till

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{10 + 0.1x^2 + 0.01x^3}$$

är ...

- ☐ 0.005
- ☐ 0.05
- ☐ 0.5
- ☐ 5
- ☐ 50
- ☐ 500

(2p) **5.** En metod för ekvationslösning har genererat korrektionstermerna $0.01, 0.001, 10^{-6}, 10^{-15}, \ldots$ Vad kan vi säga om ...

metodens konvergens?

- ☐ Ingenting
- ☐ Det är linjär konvergens
- ☐ Det är kvadratisk konvergens
- ☐ Det är kubisk konvergens

den asymptotiska felkonstanten

- ☐ 10^{-2}
- ☐ 1
- ☐ 10
- ☐ 100
- ☐ 1000

(3p) **6.** Givet ekvationen

$$x^4 + 2x^2 - x - 160000 = 0,$$

En bra startgissning är ...

- ☐ 0.001
- ☐ 2
- ☐ 20
- ☐ 400
- ☐ 160000

Felet i startgissningen är ca ...

- ☐ 10^{-4}
- ☐ 0.025
- ☐ 1
- ☐ 2.5
- ☐ 800

(2p) **7.** För att beräkna en approximation till $y(2.1)$ för ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = (t - 2.1)y - 40/y^2, \quad y(2) = 100$$

görs ett steg med Eulers metod. Resultatet blir ungefär

- ☐ 98
- ☐ 99
- ☐ 100
- ☐ 101
- ☐ 102
- ☐ 104

(3p) **8.** Integralen $\int_0^\infty f(x)dx$ med

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^8 + x^4 + x + 10}}$$

skall beräknas med fel mindre än 6×10^{-10}. Då är det lämpligt att beräkna $\int_0^B f(x)dx$ med B ...

- ☐ 3
- ☐ 10
- ☐ 30
- ☐ 100
- ☐ 300
- ☐ 1000

(2p) **9.** Trapetsregeln för beräkning av en integral har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att ...

- ☐ Felet är litet
- ☐ Antalet korrekta decimaler kvadreras
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden i kub

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd.

(12) **P1.** Skriv en algoritm i Matlab som bestämmer x och y med fel mindre än $0.5 \cdot 10^{-6}$ då

$$\begin{aligned} 10x + x^3 - y + 0.1xy &= 1 \\ x + 10y + y^3 &= 0.5 \end{aligned}$$

För full poäng krävs rimlig (motiverad) startgissning för såväl x som y, samt att ni formulerar detaljerna i den första iterationen. Vidare skall du beskriva hur felet kan skattas.

(12) **P2.** Skriv ett Matlabprogram som beräknar och ritar $u(t), 0 \le t \le 10$, där

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 3\frac{du}{dt} + \alpha u = \sin(4t); \quad u(0) = 1; u'(0) = 0.2;$$

Programmet skall rita lösningskurvorna för $\alpha = 0.5, 1, 2, 3, 5$ i samma figur, samt tabellera $u(10)$ för de olika α-värdena.

(12) **P3.** Modellen

$$y = x_1 v + x_2(v^2 - mv) \qquad \text{där} \quad m = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i^3}{\sum_{i=1}^4 v_i^2}$$

beskriver stoppsträckan y som funktion av hastigheten v för en viss förare i en viss bil.

Vid ett försök fick man fram följande tabellvärden

v	y
30	11
50	23
70	48
90	72

Bestäm x_1 och x_2 med minstakvadratmetoden. Du får göra en algoritmbeskrivning i form av ett Matlab-program eller med detaljerade formler.

(14) **P4.** Formulera en algoritm för lösning av randvärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x + y, \quad 0 \le x \le 4, \quad y(0) + 2y(4) = 7$$

Diskretisera med lämpligt steg h enligt $x_j = jh, j = 0, 1 \ldots, N$. Formulera ett linjärt ekvationssystem $Ay = b$ för den approximativa lösningen.

Använd $h = 1$ och skriv ut det linjära ekvationssystemet i detalj. Elementen i matrisen A och komponenterna i vektorn b måste naturligtvis anges. Hur många ekvationer resp obekanta har du?

CSC, NADA, KTH

Lösning till DN1215 Numeriska Metoder för Mikroelektronik
Fredagen den 13/3 2009 kl 15-18

P1. Inför $\mathbf{z} = (x, y)^T$ och skriv

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 10x + x^3 - y + 0.1xy - 1, \\ x + 10y + y^3 - 0.5 \end{pmatrix} = 0$$

Newtons metod lyder

$$\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{z}_n + \mathbf{d}_n \quad \text{där} \quad J(\mathbf{z}_n)\mathbf{d}_n = -\mathbf{f}(\mathbf{z}_n)$$

med $J(\mathbf{z}_n)$ Jakobianen till $\mathbf{f}(\mathbf{z}_n)$, dvs

$$J(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 10 + 3x^2 + 0.1y & 0.1x \\ 1 & 10 + 3y^2 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen med Newtons metod är

$$J(\mathbf{z}_0)\mathbf{d}_0 = -\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) \quad \text{där} \quad \mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{pmatrix}$$

Startgissningen får vi genom att anta att x och y är små, så vi kan ersätta första ekvationen med $10x = 1$, och andra ekvationen med $10y = 0.5$.

Med siffervärdena insatta får vi

$$J(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} 10.035 & 0.01 \\ 1 & 10.0075 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \begin{pmatrix} 0.001 - 0.05 + 0.0005 \\ 0.1 + 0.05^3 \end{pmatrix}$$

```
z=[0.1; 0.05]; dz=z;
iter =0;
while norm(dz,inf)>1.E-7 && iter <10
  x=z(1); y=z(2);
  f=[10*x+x^3-y+0.1*x*y-1; x+10*y+y^2-0.5];
  J=[10+3*x^2+0.1*y   0.1*x
     1            10+3*y^2  ];
  dz=-J\f;
  disp([z f dz])
  z=z+dz; iter=iter+1;
end
x
```

Felet skattas med normen av den sista korrektionen `dz`.

P2. Vi börjar med att skriva om problemet till ett system av första ordningen. Inför $u_1 = u, u_2 = u'$ så får vi systemet

$$\mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u_2, \\ sin(4t) - 3u_2 - \alpha u_1 \end{pmatrix}$$

Vi skriver en Matlabfunktion för högerledet

```
function f=fodep2(t,u);
global alpha
f= [u(2)
    sin(4*t)-3*u(2)-alpha*u(1)];
```

Observera att vi vill lösa problemet för flera olika värden på α så vi har infört den globala variabeln `alpha`. Huvudprogrammet blir

```
global alpha
u0=[1;0.2]; tabell=[];
for alpha=[0.5 1 2 3 5]
  [T U]=ode45(@fodep2,[0 10],u0);
  tabell=[tabell; alpha U(end,1)];
  plot(T,U(:,1)); if alpha==0.5 hold on;
end
tabell
```

P3

```
v=[30;50;70;90]; y=[11;23;48;72];
v2=0; v3=0;
for i=1:4,
  v2=v2+v(i)^2;   v3=v3+v(i)^3;
end
m=v3/v2;
A=[v v.^2-m*v];
x=A\v

vp=30:1:100;
yp=x(1)*vp+x(2)*(vp.^2-m*vp);
plot(vp,yp,v,y,'o')
```

P4 För $h = 1$ får vi följande diskretisering av området

```
0     1     2     3     4
|-----|-----|-----|-----|
x     x     x     x     x
 1     2     3     4     5

y     y     y     y     y
 1     2     3     4     5
```

I differentialekvationen diskretiserar vi dy/dx med en framåtdifferens och kan ställa upp approximationer i punkterna x_1, x_2, x_3, x_4. Detta ger

$$\frac{y_2 - y_1}{h} - 1 - x_1 - y_1 = 0$$

$$\frac{y_3 - y_2}{h} - 1 - x_2 - y_2 = 0$$

$$\frac{y_4 - y_3}{h} - 1 - x_3 - y_3 = 0$$
$$\frac{y_5 - y_4}{h} - 1 - x_4 - y_4 = 0$$

Till detta kommer randvillkoret

$$y_1 + 2y_5 - 7 = 0$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ med

$$A = \begin{pmatrix} -1/h - 1 & 1/h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/h - 1 & 1/h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/h - 1 & 1/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/h - 1 & 1/h \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 \\ 1 + x_2 \\ 1 + x_3 \\ 1 + x_4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Som synes har vi fem ekvationer och fem obekanta. I det generella fallet har vi $N + 1$ ekvationer och lika många obekanta.