KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk, 09-01-12, kl 10-13

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E. För bonuspoäng ange termin och år

(3p) **1.** Newton-Raphson's metod används till att beräkna en rot α till en ekvation $f(x) = 0$.

Hur lyder iterationsformeln?

- ☐ $x_{n+1} = x_{n-1} - f(x_n)/f'(x_n)$
- ☐ $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)/f(x_n)$
- ☐ $x_{n+1} = f(x_n)/f'(x_n)$
- ☐ $x_{n+1} = x_n + f(x_n)/f''(x_n)$
- ☐ $x_{n+1} = f(x_n)$
- ☐ $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$

För felet $e_n = x_n - \alpha$ gäller (om x_n konvergerar mot α) kvadratisk konvergens, vilket innebär ...

- ☐ $e_{n+1} \approx Ce_n$
- ☐ $e_{n+1} = Cx_n^2$
- ☐ $e_{n+1} \approx C^2 e_n$
- ☐ $e_{n+1} \approx Ce_n^2$
- ☐ $e_{n+1} = C(x_n^2 - e_n^2)$

(2p) **2.** En grov approximation till följande integral är

$$\int_1^3 \frac{dx}{10 + e^{-(x+10)} + 0.01x^2}$$

- ☐ 0.2
- ☐ 0.02
- ☐ 0.002
- ☐ 200
- ☐ 20
- ☐ 2

(3p) **3.** Man önskar bestämma roten α till ekvationen $\int_0^1 e^{-\alpha x^2} = \alpha$ Vilken av nedanstående metodkombinationer kan användas?

- ☐ Eulers metod samt trapetsmetoden
- ☐ Trapetsmetoden samt Gausselimination
- ☐ Provskottsmetoden samt interpolation
- ☐ Runge-Kuttametoden samt interpolation
- ☐ Trapetsmetoden samt Newton-Raphson
- ☐ Trapetsmetoden samt Runge-Kuttametoden

(3p) **4.** Man önskar beräkna $y(3)$, där $y(x)$ satisfierar differentialekvationen $y' + 1 = xy^2, y(1) = 1$. Eulers metod med steget $h = 1$ används.

Vad blir resultatet?

- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ -1
- ☐ -2
- ☐ inget av ovanstående

Ovanstående differentialekvationsproblem är ett ...

- ☐ randvärdesproblem
- ☐ begynnelsevärdesproblem
- ☐ linjärt problem
- ☐ ett andra ordningens problem
- ☐ interpolationsproblem

(2p) **5.** Minstakvadratanpassning av ett andragradspolynom till tio punkter ger upphov till ett system av normalekvationer $A^T Ac = A^T b$. Matrisen $A^T A$ är av storleken (antal rader $\times$ antal kolumner) ...

- ☐ 2×2
- ☐ 10×3
- ☐ 10×10
- ☐ 10×2
- ☐ 3×2
- ☐ 3×3

(2p)

6. Givet ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$, där matrisen A är $n \times n$.

Matrisen A kallas gles om ....

- ☐ de flesta element $a_{ij} \neq 0$
- ☐ många element saknas i A
- ☐ de flesta elementen är lika med noll
- ☐ matrisen A är singulär
- ☐ n är mycket stort

(2p) **7.** Trapetsmetoden för numerisk lösning av differentialekvationer har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att . . .

- ☐ Felet avtar med antalet steg
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat
- ☐ Antalet korrekta decimaler kvadreras
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden

(2p) **8.** När man löser differentialekvationen $y' = -10y, y(0) = 1$ med Eulers framåtmetod råkar man ut för numerisk instabilitet om ...

- ☐ $0 \leq h \leq 0.2$
- ☐ $h = 0.1$
- ☐ $0 \leq h \leq 0.1$
- ☐ $0.1 \leq h \leq 0.2$
- ☐ $0.2 \leq h \leq 0.3$

(1p) **9.** Givet $y(2) = 4$ och $y(7) = 2$. Värdet $y(5)$ beräknat med linjärinterpolation blir ...

- ☐ 2.7
- ☐ 2.5
- ☐ 2.8
- ☐ 2.0
- ☐ 3.0

DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk
Onsdag 09-01-12, kl 10-13

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(12p) **1.** Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för följande problem.

$$2e^{x-y} = 2.01 - 2y, \quad e^{x+y} = 0.99 + x \qquad (*)$$

Motivera varför $x = 0, y = 0$ är en bra startgissning. Formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen. Uttryck med siffervärden och lös ekvationssystemet. Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett Matlab-program som löser $(*)$ med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-6} i varje komponent av lösningen. Bägge komponenterna och deras korrektioner ska skrivas ut.

(6p) **2.** En funktion $f(x)$ är given i form av en tabell $(x_i, f(x_i)), i = 1, 2, \ldots, n$

Tabellsteget $h = x_{i+1} - x_i$ är konstant. Vi önskar beräkna approximativa derivatavärden $f'(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Ange lämpliga approximationsformler som ger dessa derivatavärden för samtliga x_i-värden. Ange även vilken nogrannhetsordning formlerna har .

(21p) **3.** Givet följande differentialekvationer

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} = -g + kx, \quad \frac{dx}{dt} = py \qquad (**)$$

som tillsammans med villkoren "då tiden $t = 0$ så gäller $x = 0, y = 1, dy/dt = 0$" beskriver en partikels bana i xy-planet. Följande parametervärden gäller: $m = 1$, $c = 0.1$, $g = 10$, $k = 0.1$ och $p = 2$.

(6) a) Skriv om dessa ekvationer som ett system av första ordningens differentialekvationer. Ange även begynnelsevillkoren!
(En enklare uppgift erhålles om $p = 0$. För max 3p, lös uppgiften för detta enklare differentialekvationsproblem)

(10) b) Formulera en algoritm, gärna i form av ett Matlabprogram som löser differentialekvationen på tidsintervallet $[0, 8]$.
Plotta lösningen $y(t)$, dvs y som funktion v t.
Plotta även $y(x)$, dvs y som funktion av x.
(Även här får du lösa det enklare problemet, men det ger maximalt 5p.)

(5) c) De två differentialekvationerna $(**)$ kan ersättas med EN differentialekvation, vilken ger lösningen $y(x)$ direkt, utan att gå via tiden t. Formulera denna differentialekvation (som kommer att bli av andra ordningen och innehålla derivatatermer d^2y/dx^2 och dy/dx) samt dess begynnelsevillkor. Skriv om som ett system av första ordningen och formulera en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som löser problemet och sedan plottar $y(x)$.

(11p) **4.** Givet följande randvärdesproblem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

(3) a) Inför lämpliga beteckningar och ställ upp en differensapproximation som kan användas för att lösa problemet.

(8) b) Välj steglängden $h = 0.2$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som erhålles då differensmetoden i a) används. Hur många ekvationer erhålls? Har matrisen i ekvationssystemet någon egenskap som kan utnyttjas för att lösa ekvationssystemet med färre operationer i Gausseliminationen?