KTH-CSC
H Eriksson

Namn: ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

Tentamen i DN1240, Numeriska metoder gk, lör 10 jan 2009 10-13 (gäller också för alla andra grundkurser i numeriska metoder)

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns inklusive bonuspoäng: 14p E.

(2p) **1.** Om felet i ett närmevärde är högst 0.005, vad vet man då om ...

... antalet korrekta siffror?

- ☐ Cirka två.
- ☐ Cirka tre.
- ☐ Man vet ingenting.

... antalet korrekta decimaler?

- ☐ Cirka två.
- ☐ Cirka tre.
- ☐ Man vet ingenting.

(2p) **2.** Minstakvadratanpassning av en fjärdegradskurva till åtta givna punkter leder till ekvationssystemet $\mathbf{Ac} = \mathbf{y}$.

Hur stor är $\mathbf{A}$ (rad×kol)?

- ☐ Fyra gånger åtta.
- ☐ Fem gånger åtta.
- ☐ Åtta gånger fyra.
- ☐ Åtta gånger fem.

Vad blir högerledet i normalekvationerna?

- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- ☐ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$
- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{c}$
- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{y}$

(2p) **3.** Man undviker interpolation med niondegradspolynom.

Varför?

- ☐ Sämre anpassning.
- ☐ Svängningsfenomen.
- ☐ Residualer.
- ☐ Dålig kondition.

Vad är att föredra?

- ☐ Hermiteinterpolation.
- ☐ Styckvisa tredjegradspolynom.
- ☐ Richardsonextrapolation.
- ☐ Trigonometriska polynom.

(4p) **4.** Ekvationen $x^5 = x + 1$ har en rot mellan 1 och 2. Ungefär hur många iterationer krävs för att bestämma den med sexton decimaler ...

... med Newton-Raphson?

- ☐ Fyra.
- ☐ Åtta.
- ☐ Sexton.
- ☐ Fler än sexton.

... med intervallhalvering?

- ☐ Åtta.
- ☐ Sexton.
- ☐ Trettiotvå.
- ☐ Fler än trettiotvå.

(4p) **5.** För funktionen $f(x) = x(1 + \sin x)$m vad blir den numeriska uppskattningen av $f'(\pi/4)$ om man använder ...

... centraldifferens med $h = \pi/4$?

- [ ] Cirka 1.7
- [ ] Exakt 2
- [ ] Cirka 2.3

... framåtdifferens med $h = \pi/4$?

- [ ] Cirka 1.7
- [ ] Exakt 2
- [ ] Cirka 2.3

(2p) **6.** Differentialekvationen $y''' + (y' + x)^2 = e^x$ ska skrivas om för att lösas med Runge-Kuttas metod från $x = 0$ till $x = 1$ med steget $h = 0.1$

Hur många ekvationer blir det?

- [ ] Tre
- [ ] Tio
- [ ] Elva
- [ ] Fler än elva

Hur många startvärden krävs vid $x = 0$?

- [ ] Tre
- [ ] Tio
- [ ] Elva
- [ ] Fler än elva

(2p) **7.** Du råkar ut för ett ickelinjärt ekvationssystem med tre obekanta. Vilken metod är användbar om ...

... antalet ekvationer är tre?

- [ ] Newtons metod
- [ ] Eulers metod
- [ ] Hermites metod

... antalet ekvationer är tio?

- [ ] Runge-Kuttas metod
- [ ] Sekantmetoden
- [ ] Gauss-Newtons metod

(2p) **8.** På sjöräddningsfartyg används räddningskanoner för att precisionsskjuta en lina till en nödställd. När man sköt i trettio graders vinkel kom nedslaget tre meter för långt bort. Andra skottet sköts i tjugo graders vinkel och det blev två meter för kort. Nu hade man bara ett skott kvar och det måste träffa. Som nummeexpert tillfrågas du om vilken vinkel man ska skjuta i. Vad svarar du?

- [ ] 21
- [ ] 22
- [ ] 23
- [ ] 24
- [ ] 25
- [ ] 26

Del 2 av tentan har nu troligen delats ut, den som är till för dom som vill ha överbetyg, alltså för såna som dej. Båda delarna lämnas in tillsammans i tentaomslaget.

KTH-CSC

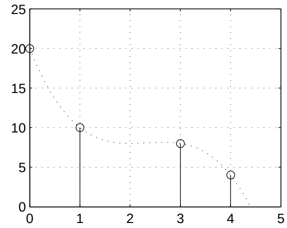
Tentamen i DN1240, Numeriska metoder gk, lör 10 jan 2009 10-13 (gäller också för alla andra grundkurser i numeriska metoder)

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40 A.

1. *Vad finns bakom fläcken?*

Man ska anlägga en hoppbacke i en sluttning och har mätt in fem punkter (i lämplig skalning). En kaffefläck har råkat utplåna det mittersta värdet.

x	0	1	2	3	4
y	20	10	$\clubsuit$	8	4



Rekonstruera det genom att lägga ett tredjegradspolynom genom de övriga punkterna.

(6p) **a)** Använd en smart ansats och handräkna fram polynomkoefficienterna och det saknade y-värdet bakom fläcken.

(6p) **b)** Använd naiva ansatsen (se baksidan) och visa en algoritm som beräknar och ritar upp tredjegradspolynomet.

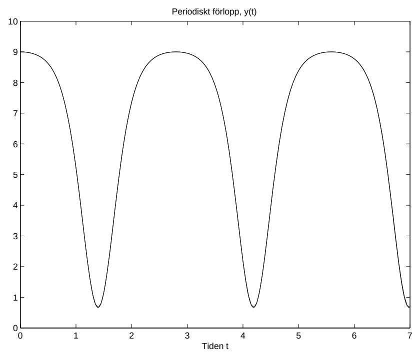
2. *Pulser i en jämn ström*

Figuren visar lösningen till differentialekvationen

$$\frac{d^3y}{dt^3} = 8(y - 2\pi)\,\frac{dy}{dt}$$

med $y(0) = 9,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2$.

(12p) Omforma till ett system av första ordningens ODE och skriv en algoritm som med rungekuttametoden RK4 (se baksidan) och steget $h = 0.05$ beräknar och ritar upp lösningskurvan i intervallet $0 \le t \le 7$.



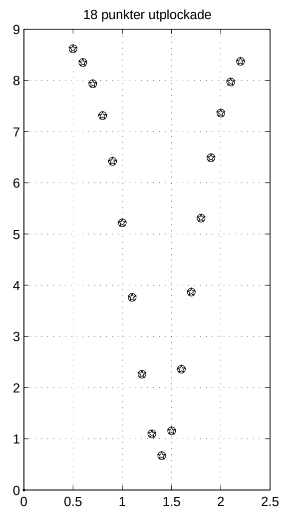
3. *Approximerande gaussklocka*

Vi vill undersöka hur väl lösningskurvan i uppgift 2 kan approximeras av en uppochnedvänd gaussklocka (normalfördelningskurva) i intervallet $0.5 \le t \le 2.2$. Därför ansätter vi en modellfunktion på formen

$$F(t) = a + b\,e^{-c\,(t-\mu)^2}.$$

Till vårt förfogande finns 18 y-värden $y_1, y_2, ..., y_{18}$ från den numeriska diffekvationslösningen för t=0.5, 0.6,...,2.2.

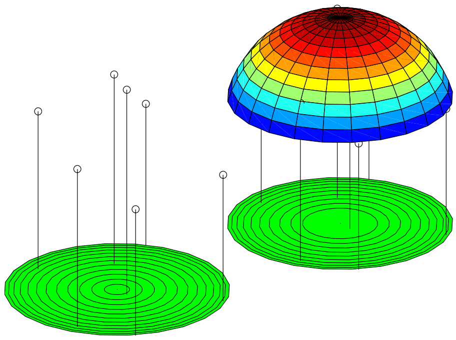
(14p) Det gäller att bestämma de fyra parametrarna i modellen så att avvikelsen mellan givna data och modell minimeras i minstakvadratmetodens mening. Beskriv så fullständigt som möjligt en algoritm som beräknar parametervärdena och ritar den erhållna modellkurvan. Värdet på c är cirka 5; startgissningar till övriga parametrar erhålls ur figuren.



4. *Takkupolen*

En kupol med sfärisk välvning ska så bra som möjligt anpassas till följande mätpunkter:

x	5	7	8	10	12	14	15
y	5	2	13	7	11	3	12
z	10	8	10	13	12	8	9



Takkupolen bestäms av det sfäriska uttrycket

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

(12p) Skriv en algoritm för lösning av detta modell-anpassningsproblem.

Pluspoäng för den som har tid över: Skriv matlabkod för uppritning av takkupolen (figurens kupol uppfyller $0 \leq \theta \leq 75^o$).

Utdrag ur formelsamlingen:

- - -

Det $(n-1)$-gradspolynom som går genom n givna punkter bestäms med *naiva ansatsen* $P(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ (ger fyllt system) eller bättre med *Newtons ansats* $P(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$, som ger triangulärt system.

- - -

Runge–Kutta–metoder gör flera funktionsberäkningar i varje steg och får därigenom hög noggrannhet. Mest känd är fjärde ordningens rungekutta (*RK4*) med felutvecklingen $c_4h^4 + c_5h^5 + \cdots$, och den lyder $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h(\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4)/6$, där $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(t_i + h/2, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_1/2)$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}(t_i + h/2, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_2/2)$, $\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}_3)$.

KTH-CSC
H Eriksson

Namn: ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

Tentamen i DN1240, Numeriska metoder gk, lör 10 jan 2009 10-13
(gäller också för alla andra grundkurser i numeriska metoder)

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns inklusive bonuspoäng: 14p E.

(2p) **1.** Om felet i ett närmevärde är högst 0.005, vad vet man då om ...

... antalet korrekta siffror?

- ☐ Cirka två.
- ☐ Cirka tre.
- ☒ Man vet ingenting.

... antalet korrekta decimaler?

- ☒ Cirka två.
- ☐ Cirka tre.
- ☐ Man vet ingenting.

(2p) **2.** Minstakvadratanpassning av en fjärdegradskurva till åtta givna punkter leder till ekvationssystemet $\mathbf{Ac} = \mathbf{y}$.

Hur stor är $\mathbf{A}$ (rad×kol)?

- ☐ Fyra gånger åtta.
- ☐ Fem gånger åtta.
- ☐ Åtta gånger fyra.
- ☒ Åtta gånger fem.

Vad blir högerledet i normalekvationerna?

- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
- ☐ $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$
- ☐ $\mathbf{A}^T\mathbf{c}$
- ☒ $\mathbf{A}^T\mathbf{y}$

(2p) **3.** Man undviker interpolation med niondegradspolynom.

Varför?

- ☐ Sämre anpassning.
- ☒ Svängningsfenomen.
- ☐ Residualer.
- ☐ Dålig kondition.

Vad är att föredra?

- ☐ Hermiteinterpolation.
- ☒ Styckvisa tredjegradspolynom.
- ☐ Richardsonextrapolation.
- ☐ Trigonometriska polynom.

(4p) **4.** Ekvationen $x^5 = x + 1$ har en rot mellan 1 och 2. Ungefär hur många iterationer krävs för att bestämma den med sexton decimaler ...

... med Newton-Raphson?

- ☒ Fyra.
- ☐ Åtta.
- ☐ Sexton.
- ☐ Fler än sexton.

... med intervallhalvering?

- ☐ Åtta.
- ☐ Sexton.
- ☐ Trettiotvå.
- ☒ Fler än trettiotvå.

(4p) **5.** För funktionen $f(x) = x(1 + \sin x)$ vad blir den numeriska uppskattningen av $f'(\pi/4)$ om man använder ...

... centraldifferens med $h = \pi/4$?

- [ ] Cirka 1.7
- [x] Exakt 2
- [ ] Cirka 2.3

... framåtdifferens med $h = \pi/4$?

- [ ] Cirka 1.7
- [ ] Exakt 2
- [x] Cirka 2.3

(2p) **6.** Differentialekvationen $y''' + (y' + x)^2 = e^x$ ska skrivas om för att lösas med Runge-Kuttas metod från $x = 0$ till $x = 1$ med steget $h = 0.1$

Hur många ekvationer blir det?

- [x] Tre
- [ ] Tio
- [ ] Elva
- [ ] Fler än elva

Hur många startvärden krävs vid $x = 0$?

- [x] Tre
- [ ] Tio
- [ ] Elva
- [ ] Fler än elva

(2p) **7.** Du råkar ut för ett ickelinjärt ekvationssystem med tre obekanta. Vilken metod är användbar om ...

... antalet ekvationer är tre?

- [x] Newtons metod
- [ ] Eulers metod
- [ ] Hermites metod

... antalet ekvationer är tio?

- [ ] Runge-Kuttas metod
- [ ] Sekantmetoden
- [x] Gauss-Newtons metod

(2p) **8.** På sjöräddningsfartyg används räddningskanoner för att precisionsskjuta en lina till en nödställd. När man sköt i trettio graders vinkel kom nedslaget tre meter för långt bort. Andra skottet sköts i tjugo graders vinkel och det blev två meter för kort. Nu hade man bara ett skott kvar och det måste träffa. Som nummeexpert tillfrågas du om vilken vinkel man ska skjuta i. Vad svarar du?

- [ ] 21
- [ ] 22
- [ ] 23
- [x] 24
- [ ] 25
- [ ] 26

Del 2 av tentan har nu troligen delats ut, den som är till för dom som vill ha överbetyg, alltså för såna som dej. Båda delarna lämnas in tillsammans i tentaomslaget.

LÖSNINGAR till Tentamen i DN1240 Numeriska metoder gk, 2009-01-10
Här visas lösningsförslag till del 2.

1. Vad finns bakom fläcken?
a) Använd Newtons ansats: $P(x) = c_1 + c_2x + c_3x(x-1) + c_4x(x-1)(x-3)$.
Insättning av mätdata ger: $c_1 = 20$, $\quad 20 + c_2 = 10$, dvs $c_2 = -10$.
$\quad 20 - 10 \cdot 3 + c_3 \cdot 3 \cdot 2 = 8$, $\quad$ dvs $c_3 = 18/6 = 3$.
$\quad 20 - 10 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + c_4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4$, $\quad$ som ger $c_4 = -12/12 = -1$.
Polynomet är alltså $P(x) = 20 - 10x + 3x(x-1) - x(x-1)(x-3)$
Bakom fläcken döljer sig siffran 8, eftersom $P(2) = 8$.

b) Med naiva ansatsen blir algoritmen:

```
  x=[0 1 3 4]';  y=[20 10 8 4]';
  A=[ones(4,1) x x.^2 x.^3];  c=A\y
  X=(0:0.1:4.5)';  P=[ones(size(X)) X X.^2 X.^3]*c;
  stem(x,y), hold on, plot(X,P)
```

2. Pulser i en jämn ström
a) Omskrivningen $u_1 = y$, $u_2 = y'$, $u_3 = y''$ ger ett system av tre första ordningens ODE: $u_1' = u_2$, $u_2' = u_3$, $u_3' = 8(u_1 - 2\pi)u_2$.
Funktionen `fpuls` nedan definierar högerledet i ode-systemet.

```
function pulsstrom
  clear, clf
  tslut=7;  dt=0.05;  u=[9 0 -2];  t=0; Y=u(1);  T=t;
  while t<tslut-dt/2
    f1=fpuls(u);
    f2=fpuls(u+dt*f1/2);
    f3=fpuls(u+dt*f2/2);
    f4=fpuls(u+dt*f3);
    u=u+dt*(f1+2*f2+2*f3+f4)/6;  t=t+dt;
    Y=[Y; u(1)];   T=[T; t];
  end
  plot(T,Y), title('Pulser i jämn ström'), xlabel('Tiden t')
%.......................................................
function f=fpuls(u)
   f=[u(2) u(3) 8*(u(1)-2*pi)*u(2)];
```

3. Approximerande gaussklocka
Givet är 18 mätdata och modellen har 4 obekanta a, b, c och μ. Det leder till ett överbestämt ickelinjärt ekvationssystem som löses med Gauss-Newtons metod.

Med hjälp av figuren i tentalydelsen och normalfördelningskurvans egenskaper utläser man: $\mu \approx 1.4$ (t-värdet vid minimum), $a \approx 9$ (kurvan planar ut vid höjden $y = 9$), $b \approx -8$ (neg.amplitud, kurvans utsträckning i höjdled). Vi vet dessutom att $c \approx 5$. Jacobianen blir en 18×4-matris med partiella derivator (som ska beräknas för att full poäng ska erhållas), se J i koden.

```
% Hämta y-värden från uppgift 2
  t=(0.5:0.1:2.2)'; y=Y(11:2:45);
  plot(t,y,'p'), hold on
  a=9; b=-8; c=5; my=1.4; p=[a b c my]';
  dp=p; iter=0;
  while norm(dp)>1e-5
```

```
    g=exp(-c*(t-my).^2);
    F=a+b*g;  f=F-y;
    J=[ones(size(t)) g  -b*(t-my).^2.*g  2*b*c*(t-my).*g];
    dp=-J\f;
    p=p+dp;  a=p(1); b=p(2); c=p(3); my=p(4); iter=iter+1;
  end
  p, iter
  X=(0.5:0.01:2.2)';  F=a+b*exp(-c*(X-my).^2);  plot(X,F,'g')

% (Parametrarna blir a=8.59, b=-7.83, c=5.29, my=1.397 efter 5 iter.)
```

4. Takkupolen

Sju mätpunkter är givna och fyra obekanta a, b, c och R ska bestämmas. Det är ett överbestämt ickelinjärt ekvationssystem som löses med Gauss-Newtons metod.

```
  x=[5  7 8  10 12 14 15]';
  y=[5  2 13  7 11  3 12]';
  z=[10 8 10 13 12  8  9]';
% Hämta goda startgissningar ur figuren i tentalydelsen
  a=10; b=9; c=10; R=5; p=[a b c R]';
  for iter=1:6
    f=(x-a).^2 +(y-b).^2+(z-c).^2-R^2;
    fnorm=norm(f)
    J=-2*[x-a  y-b  z-c  R*ones(7,1)];
    dp=-J\f; p=p+dp;
    a=p(1); b=p(2); c=p(3); R=p(4);
  end
  a, b, c, R

% Pluspoäng om kupolen ritas!
  fi=(0:2*pi/24:2*pi)';
  tmax=75*pi/180;  teta=0:tmax/12:tmax;
  X=a+R*cos(fi)*sin(teta);
  Y=b+R*sin(fi)*sin(teta);
  Z=c+R*ones(size(fi))*cos(teta);
  stem3(x,y,z), hold on, surf(X,Y,Z), axis equal
```