 Namn: ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk, 08-12-17

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

1. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^3q}{dt^3} + 3\frac{dq}{dt}q^2 = \sin(t)$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir n. . .

- ☐ det är omöjligt att säga
- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☐ 3.
- ☐ 4.

(2p) **2.** Minstakvadratanpassning görs av ett tredjegradspolynom till givna mätdata y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 vid x-värdena x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Hur många okända parametrar ska bestämmas?

- ☐ Två.
- ☐ Tre.
- ☐ Fyra.
- ☐ Fem.
- ☐ Tio.

Problemet ovan leder till ett överbestämt linjärt ekvationssystem $Ax \approx b$. Vilket påstående nedan är sant?

- ☐ Normalekvationerna lyder $AA^Tx = Ab$
- ☐ Residualvektorn definieras $r = b - x$
- ☐ Minstakvadratmetoden minimerar normen för x
- ☐ Minstakvadratmetoden minimerar Euklidiska normen för $r = b - Ax$.
- ☐ Om kolumnerna i A är linjärt beroende så blir normalekvationernas koefficientmatris icke-singulär.

(2p) **3.** Givet en funktion $f(t)$. Uttrycket $(f(3.01) - f(2.99))/0.02$ är en differensapproximation till . . . (fler alternativ kan vara rätt, felaktigt svar ger avdrag i uppg. 3 endast)

- ☐ $f'(3.01)$
- ☐ $f'(3.00)$
- ☐ $f'(2.99)$
- ☐ $f''(3.01)$
- ☐ $f''(3.00)$
- ☐ $f''(2.99)$

(2p) **4.** En grov approximation till

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{100 + x^2 + 0.1x^3}$$

är . . .

- ☐ 0.005
- ☐ 0.05
- ☐ 0.5
- ☐ 5
- ☐ 50
- ☐ 500

(2p) **5.** En metod för ekvationslösning har genererat korrektionstermerna $0.01, 0.001, 10^{-5}, 10^{-9}, \ldots$ Vad kan vi säga om ...

metodens konvergens?

- ☐ Ingenting
- ☐ Det är linjär konvergens
- ☐ Det är kvadratisk konvergens
- ☐ Det är kubisk konvergens

den asymptotiska felkonstanten

- ☐ 10^{-4}
- ☐ 0.01
- ☐ 0.1
- ☐ 1
- ☐ 10

(3p) **6.** Givet ekvationen $x^4 + e^{x-100} = 16$, där $e^{-100} \approx 4 \times 10^{-44}$

En bra startgissning är ...

- ☐ 0
- ☐ 0.1
- ☐ 2
- ☐ 16
- ☐ 100

Felet i startgissningen är ca ...

- ☐ 10^{-44}
- ☐ 10^{-24}
- ☐ 10^{-10}
- ☐ 10^{-6}
- ☐ 0.01

(2p) **7.** För att beräkna en approximation till $y(1.1)$ för ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = t^2 y - 0.08y^2, \quad y(1) = 10$$

görs ett steg med Eulers metod. Resultatet blir

- ☐ 9.6
- ☐ 9.8
- ☐ 10
- ☐ 10.1
- ☐ 10.2
- ☐ 10.4

(3p) **8.** Integralen $\int_0^\infty f(x)dx$ med

$$f(x) = \frac{1}{x^7 + \sqrt{x^4 + 3x^2 + x + 1}}$$

skall beräknas med fel mindre än 2×10^{-12}. Då är det lämpligt att beräkna $\int_0^B f(x)dx$ med B ...

- ☐ 3
- ☐ 10
- ☐ 30
- ☐ 100
- ☐ 300
- ☐ 1000

(2p) **9.** Heuns metod för numerisk lösning av differentialekvationer har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att ...

- ☐ Felet avtar med antalet steg
- ☐ Antalet korrekta decimaler kvadreras
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden
- ☐ Det globala felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat

DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk

Onsdag 08-12-17

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40 A.

(12p) **1.** Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för följande problem.

$$15x + y - z^2 = 30, \quad -z - x + 30y = 30, \quad -x^2 + 100z + y = 20$$

Bestäm en grov startapproximation, och formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen. Uttryck med siffervärden insatta räcker. Skriv därefter ett Matlabprogram som löser det ursprungliga problemet med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-9} i varje komponent av lösningen. Programmet skall skriva ut tillräckligt med mellanresultat så konvergensen kan kontrolleras. Om du inte har bestämt någon startapproximation så får du hitta på någon.

(10p) **2.** Vid numerisk beräkning av en integral med en ny smart stegmetod erhölls följande resultat $I(h)$ för några olika steglängder h.

h	0.4	0.2	0.1	0.05
I	2.8725600	2.3101600	2.2400100	2.2312506

Bestäm noggrannhetsordningen för metoden.

(14p) **3.** Funktionerna $u(t)$ och $v(t)$ satisfierar

$$u'' + v^2u = \sin(t); \quad v'' + u^2v = \sin(2t)$$
$$u(0) = 1, u'(0) = 0.2, v(0) = -0.2, v'(0) = 0.5$$

Skriv först ett Matlabprogram som beräknar lösningen för $0 \le t \le 2$. Programmet skall rita grafen för $u(t)$ och $v(t)$ för $0 \le t \le 2$ samt skriva ut värdet av $u(2)$ respektive $v(2)$.

Modifiera eller utöka därefter programmet så även

$$\int_0^2 u(t)^2 + v(t)^2 dt$$

beräknas.

(14p) **4.** Givet följande differentialekvationsproblem med en okänd parameter α

$$u'' + 2u'u^2 + 2u = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u(1) = \alpha$$

Den okänd parametern α bestäms från villkoret

$$\int_0^1 u(t)^2 dt = \alpha^2$$

Diskretisera t-axeln med punkterna $t_i = i/4$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Diskretisera differentialekvation och integralvillkor så vi får ett (icke-linjärt) ekvationssystem för våra obekanta. Hur många obekanta har vi? Skriv i detalj upp ekvationerna. Hur många ekvationer blir det?

KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk, 08-12-17

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

1. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^3q}{dt^3} + 3\frac{dq}{dt}q^2 = \sin(t)$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir n. . .

- ☐ det är omöjligt att säga
- ☐ 1.
- ☐ 2.
- ☒ 3.
- ☐ 4.

(2p) **2.** Minstakvadratanpassning görs av ett tredjegradspolynom till givna mätdata y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 vid x-värdena x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Hur många okända parametrar ska bestämmas?

- ☐ Två.
- ☐ Tre.
- ☒ Fyra.
- ☐ Fem.
- ☐ Tio.

Problemet ovan leder till ett överbestämt linjärt ekvationssystem $Ax \approx b$. Vilket påstående nedan är sant?

- ☐ Normalekvationerna lyder $AA^Tx = Ab$
- ☐ Residualvektorn definieras $r = b - x$
- ☐ Minstakvadratmetoden minimerar normen för x
- ☒ Minstakvadratmetoden minimerar Euklidiska normen för $r = b - Ax$.
- ☐ Om kolumnerna i A är linjärt beroende så blir normalekvationernas koefficientmatris icke-singulär.

(2p) **3.** Givet en funktion $f(t)$. Uttrycket $(f(3.01) - f(2.99))/0.02$ är en differensapproximation till . . . (fler alternativ kan vara rätt, felaktigt svar ger avdrag i uppg. 3 endast)

- ☒ $f'(3.01)$
- ☒ $f'(3.00)$
- ☒ $f'(2.99)$
- ☐ $f''(3.01)$
- ☐ $f''(3.00)$
- ☐ $f''(2.99)$

(2p) **4.** En grov approximation till

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{100 + x^2 + 0.1x^3}$$

är . . .

- ☒ 0.005
- ☐ 0.05
- ☐ 0.5
- ☐ 5
- ☐ 50
- ☐ 500

(2p) **5.** En metod för ekvationslösning har genererat korrektionstermerna $0.01, 0.001, 10^{-5}, 10^{-9}, \ldots$ Vad kan vi säga om ...

metodens konvergens?

- ☐ Ingenting
- ☐ Det är linjär konvergens
- ☒ Det är kvadratisk konvergens
- ☐ Det är kubisk konvergens

den asymptotiska felkonstanten

- ☐ 10^{-4}
- ☐ 0.01
- ☐ 0.1
- ☐ 1
- ☒ 10

(3p) **6.** Givet ekvationen $x^4 + e^{x-100} = 16$, där $e^{-100} \approx 4 \times 10^{-44}$

En bra startgissning är ...

- ☐ 0
- ☐ 0.1
- ☒ 2
- ☐ 16
- ☐ 100

Felet i startgissningen är ca ...

- ☒ 10^{-44}
- ☐ 10^{-24}
- ☐ 10^{-10}
- ☐ 10^{-6}
- ☐ 0.01

(2p) **7.** För att beräkna en approximation till $y(1.1)$ för ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = t^2y - 0.08y^2, \quad y(1) = 10$$

görs ett steg med Eulers metod. Resultatet blir

- ☐ 9.6
- ☐ 9.8
- ☐ 10
- ☐ 10.1
- ☒ 10.2
- ☐ 10.4

(3p) **8.** Integralen $\int_0^\infty f(x)dx$ med

$$f(x) = \frac{1}{x^7 + \sqrt{x^4 + 3x^2 + x + 1}}$$

skall beräknas med fel mindre än 2×10^{-12}. Då är det lämpligt att beräkna $\int_0^B f(x)dx$ med B ...

- ☐ 3
- ☐ 10
- ☐ 30
- ☒ 100
- ☐ 300
- ☐ 1000

(2p) **9.** Heuns metod för numerisk lösning av differentialekvationer har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att ...

- ☐ Felet avtar med antalet steg
- ☐ Antalet korrekta decimaler kvadreras
- ☐ Felet är proportionellt mot steglängden
- ☒ Det globala felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat

CSC, NADA, KTH

Lösning till DN1240 Numeriska Metoder Gk 2k
Den 17/12 2008

P1. Inför $\mathbf{w}_k = (x, y, z)^T$ och skriv

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 15x + y - z^2 - 30 \\ -x + 30y - z - 30 \\ -x^2 + y + 100z - 20 \end{pmatrix} = 0$$

Newtons metod lyder

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mathbf{d}_n \quad \text{där} \quad J(\mathbf{w}_n)\mathbf{d}_n = -\mathbf{F}(\mathbf{w}_n)$$

med $J(\mathbf{w}_n)$ Jakobianen till $\mathbf{F}(\mathbf{w})$, dvs

$$J(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 15 & 1 & -2z \\ -1 & 30 & -1 \\ -2x & 1 & 100 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen med Newtons metod är

$$J(\mathbf{w}_0)\mathbf{d}_0 = -\mathbf{F}(\mathbf{w}_0) \quad \text{där} \quad \mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

Startgissningen har vi fått genom att anta att x, y och z är små, så vi kan ersätta första ekvationen med $15x = 30$, andra ekvationen med $30y = 30$, och sista ekvationen med $100z = 20$.

Med siffervärdena insatta får vi

$$J(\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} 15 & 1 & -0.4 \\ -1 & 30 & -1 \\ -4 & 1 & 100 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} 1 - 0.04 \\ -2 - 0.2 \\ -4 + 1 \end{pmatrix}$$

```
w=[2; 1; 0.2]; dw=w;
iter =0;
while norm(dz,inf)>1.E-9 && iter <10
  x=w(1); y=w(2); z=w(3);
  F=[15*x+y-z^2-30; -x+30*y-z-30; -x^2+y+100*z -20];
  J=[15  1  -2*z; -1  30  -1; -2*x  1  100];
  dw=-J\F;
  disp([w F dw])
  w=w+dw; iter=iter+1;
end
w
```

Felet skattas med normen av den sista korrektionen `dw`.

P2. Vi beräknar skillnaden mellan I-värdena för $h = 0.2$ och $h = 0.1$ till 0.07015 och skillnaden mellan I-värdena för $h = 0.1$ och $h = 0.05$ till 0.0087594. Kvoten mellan 7000 och 876 blir ca 8. Steglängden halveras så kvoten skall vara 2^p, vilket medför att noggrannhetsordningen $p = 3$.

P3 Inför $y_1 = u, y_2 = u', y_3 = v, y_4 = v'$ så får vi systemet

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_2, \\ sin(t) - y_3^2 y_1 \\ y_4 \\ sin(2t) - y_1^2 y_3 \end{pmatrix}$$

Vi skriver en Matlabfunktion för högerledet

```
function dydt=fun3(t,y);
dydt= [y(2)
       sin(t)-y(3)^2*y(1)
       y(4)
       sin(2*t)-y(1)^2*y(3)];
```

Huvudprogrammet blir

```
  [T Up]=ode45(@fun3,[0 2], [1;0.2;-0.2;0.5]);
  plot(T,Up(:,[1 3]));
  Up(end,[1 3])
end
```

Modifikation: Lägg till en femte komponent i fun3

```
 y(1)^2+y(3)^2
```

och utöka startvektorn med en femte komponent som är 0. Utskriften ändras till `Up(end,[1 3 5])`

P4 För $h = 1$ får vi följande diskretisering av området

```
0    1/4   1/2   3/4    1
|-----|-----|-----|-----|
t     t     t     t     t
 0     1     2     3     4

y     y     y     y     y
 0     1     2     3     4
```

I differentialekvationen diskretiserar vi d^2u/dt^2 och du/dt med centraldifferenser och kan ställa upp approximationer i de inre punkterna t_1, t_2, t_3, t_4. Detta ger med $h = 1/4$.

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + 2\frac{y_2 - y_0}{2h} y_1^2 + 2y_1 = 0$$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + 2\frac{y_3 - y_1}{2h}y_2^2 + 2y_2 = 0$$
$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} + 2\frac{y_4 - y_2}{2h}y_3^2 + 2y_3 = 0$$

Till detta kommer randvillkoren

$$y_0 = 2, \quad y_4 = alfa$$

samt integralvillkoret diskretiserat med trapetsregeln

$$h(0.5y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 0.5y_4^2) - alpha^2 = 0$$

Detta är ett icke-linjärt ekvationssystem med sex obekanta, $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, alpha$ och sex ekvationer. Vi kan enkelt eliminera y_0 och $alpha$ och få ett system med 4 ekvationer för 4 obekanta.