CSC (NADA), KTH, Beatrice Frock

Namn: ....

Personnummer:............................. **Program, årskurs:** ....

DN1212, DN1214, Tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
Måndag 1 december 2008 kl 9–12

Betygsgränser för betyg **E**: 14 poäng, för betyg **D**: 17 poäng.

Del 1: 20 poäng. **Inga hjälpmedel.**

Bonus. Ange dina giltiga bonuspoäng från vt-08 eller ht-08, och den kursomgång (linje, termin) där poängen erhållits.

(2) 1a. En integral har beräknats med trapetsregeln och två olika steglängder, $T(h = 0.25) = 4.06$, $T(h = 0.125) = 7.12$. Det extrapolerade värdet blir då

☐ 3.04 ☐ 6.10

☐ 3.30 ☐ 7.89

☐ 4.06 ☐ 8.14

☐ 5.08 ☐ 10.18

(1) b. När det första extrapolerade värdet beräknas, bör korrektionstermerna i ett extrapolationsschema (med värdet motsvarande största steglängden överst i tabellen)

☐ avta med faktorn 3

☐ avta med faktorn 4

☐ växa med faktorn 3

☐ växa med faktorn 4

☐ växla tecken

Vänd!

2. Givet är följande tabell:

x	-1/3	1	1/2
y	2	2	5

Anpassa modellen $y = a + \frac{b}{x}$ med minsta kvadratmetoden, och bestäm a och b.

(1p) Värdet av a blir

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

(1p) Värdet av b blir

- ☐ 2/5
- ☐ -3/5
- ☐ 5/2
- ☐ 6/14
- ☐ -15/2
- ☐ -14/15

(1p) Uttrycket som minimeras av metoden är

- ☐ $\sum(a + b/x_i - y_i)^2)$
- ☐ $\sum(a + b/x_i)^2)$
- ☐ $\sum(a + b/y_i - x_i))^2$
- ☐ $\sum(a + bx_i - y_i)^2$
- ☐ $\sum(a + b(y_i - x_i))^2$
- ☐ $\sum(a \cdot y_i b \cdot x_i)^2$

(2) 3a. Givet att $y(1) = 2$ och $y(5) = 6$, värdet $y(3.5)$ beräknat med linjär interpolation blir

- ☐ 3
- ☐ 3.5
- ☐ 4
- ☐ 4.5
- ☐ 5
- ☐ 5.5

(1) b. Runges fenomen innebär att

- ☐ Runge-Kuttas metod blir instabil
- ☐ ett högre grads interpolationspolynom kan oscillera mellan noderna
- ☐ systemet är överbestämt
- ☐ systemet är singulärt
- ☐ linjär interpolation ger ett stort trunkationsfel
- ☐ avrundningsfel dominerar

(2) 4. Utför en iteration i Newton-Raphsons metod för bestämning av den rot till ekvationen $x^4 + 2x - 10 = 0$ som ligger i närheten av $x = 1$. Värdet blir

- ☐ -7/6
- ☐ -13/6
- ☐ 1/6
- ☐ 7/6
- ☐ 13/6
- ☐ 8/6
- ☐ -5/6
- ☐ 11/6

(2) 5. En dator löser ett linjärt ekvationssystem med 10 ekvationer och 10 obekanta på en sekund. Hur lång tid tar det att lösa ett system med 50 ekvationer och 50 obekanta?

- ☐ 5 s.
- ☐ 10 s.
- ☐ 25 s.
- ☐ 50 s.
- ☐ 100 s.
- ☐ 125 s.
- ☐ 500 s.
- ☐ 1000 s.

(3) 6. Följande ekvationssystem ska lösas med Newtons metod;

$$x^2 + y^2 = 0.8$$

$$y^2 - x^2 y = 0.4$$

Använd startvärdet $x = 1$, $y = 0$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som ska lösas då man vill genomföra en iteration med Newtons metod. Lös systemet och beräkna nästa iterat. Nästa iterat blir

- ☐ (0.9,-0.4)
- ☐ (-0.9,0.4)
- ☐ (0.8,0.6)
- ☐ (-0.8,-0.6)
- ☐ (0,1)
- ☐ (-0.8,-0.4)

Vänd!

(1) 7a. Eulers metod har noggrannhetsordning

- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 4

(2) b. Initialvärdesproblemet $y' = 2 + x/y, \quad y(4) = 1$ ska lösas med Eulers metod och steglängden $h = 0.1$. Efter ett steg blir $y-$värdet y_1

- ☐ 0.1
- ☐ 0.2
- ☐ 0.5
- ☐ 0.8
- ☐ 1.2
- ☐ 1.4
- ☐ 1.6
- ☐ 1.8

(1) 8. En differentialekvation $y'' = f(x, y, y')$ ska skrivas om som ett system av första ordningens differentialekvationer. Detta system innehåller då n första ordningens differentialekvationer, där n blir

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ beror på initiala villkoren
- ☐ ej känt i förväg

V.g. glöm inte skriva ditt namn och personnummer överst på sid. 1!

CSC(NADA), KTH, Beatrice Frock

Tentamen i Numeriska Metoder och Grundläggande Programmering
DN1212 och DN1214
Måndag 2008-12-01 kl 9–12

Del 2: 30 poäng. **Inga hjälpmedel.**

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.
Betygsgränser inkl bonuspoäng: 22p D, 35p C, 41p B, 47p A.

1. **Interpolation och integration.**

   En strandpromenad ska anläggas, från Osquarsby med koordinater (50,300) i ett lämpligt koordinatsystem, och vidare till utsiktspunkten "Ingenjören" (117,700), kaféet "Kaloririket" (210,185), lekplatsen "Datorsalen" (408,365) och ända fram till badplatsen "Nummestranden" (550,1200).

   (4) **a.** Du ska hjälpa kommunen med promenadplaneringen genom att skriva ett Matlab-program som lägger ett interpolationspolynom av lägsta möjliga grad genom dessa givna punkter. Ditt program ska även generera en plotbild över promenadkurvan (interpolationskurvan), med de givna 5 punkterna markerade.

   (4) **b.** Promenadstigens totala längd önskas. Skriv några Matlabsatser som utför denna beräkning, med en noggrannhetskontroll av resultatet. Eventuella nödvändiga funktionsfiler ska också ges.

   Obs: om del a. ej lösts så får du förutsätta att det interpolerade polynomet i a-delen redan har bestämts, och representeras av en vektor med polynomets koefficienter.

   Ledning: Längden av kurvan $y(x)$ mellan $x = x_1$ och $x = x_2$ ges av

   $$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$

   (2) **c.** Kommungränsen beskrivs av den räta linjen $x = 500$. Beskriv en algoritm för bestämning av skärningspunkten mellan strandpromenaden och denna gräns.

   Del a,b,c kan lösas oberoende av varann.

Vänd!

2. Initialvärdesproblem. Givet differentialekvationsproblemet

$$y'' + 2xy' + y = 0, \quad y(0) = 0.1, \quad y'(0) = C$$

(2) **a.** Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningen, och ange även tillhörande initiala villkoren.

(4) **b.** Skriv ett Matlab-program som beräknar värdet $y(10)$ för $C = 0.2$. Slutvärdet ska skrivas ut av programmet, samt hela lösningsbanan plottas (intervallet $0 \leq x \leq 10$).
Eventuella nödvändiga funktionsfiler ska också ges.

(2) **c.** Utvidga programmet i del a. (ovan) så att även derivatan dy/dx plottas mot x, i samma intervall.

(2) **d.** Begynnelsevärdet C är en uppmätt storhet med osäkerhet ± 0.0005.
Formulera en algoritm för att skatta osäkerhet i det beräknade resultatet $y(10)$ pga osäkerhet i C.

Del a och d kan lösas, även om du inte löst b eller c.

3. Randvärdesproblem.
Givet är randvärdesproblemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x \cdot y, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$$

a. (5) Inför lämpliga beteckningar och ställ upp en differensapproximation som kan användas för finita differensmetoden.
Vilken noggrannhetsordning får den numeriska lösningen?

b. (5) Välj steglängden $h = 0.2$. Ställ upp det linjära ekvationssystem som erhålls då finita differensmetoden används. Hur många ekvationer erhålls?
Har matrisen i detta system någon egenskap som kan utnyttjas för att lösa systemet med färre antal operationer än när vanlig Gauss-elimination används? Förklara!
Obs: Du behöver inte lösa ekvationssystemet.

God jul och god fortsättning! /Beatrice.