KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 13 januari, 2014

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Vi har parallellogrammen T med hörn $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,0)$, $C = (3,2,4)$ och $D = (4,4,3)$.
   (a) Bestäm arean av parallellogrammen T. **(2 p)**
   (b) Bestäm en ekvation för planet som innehåller T. **(2 p)**

2. För varje tal a har vi följande ekvationssystem i tre okända x, y och z.

$$(*) \quad \begin{cases} (a-2)x + 4y + 2z &= 1 \\ ay + z &= 2 \\ ax + 2y + z &= 3 \end{cases}$$

   Vi kan också skriva ekvationssystemet som en matrisekvation $AX = B$, där $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
   (a) Bestäm matrisen A. **(1 p)**
   (b) Bestäm determinanten till A. **(1 p)**
   (c) Bestäm för vilka tal a ekvationssystemet $(*)$ har en unik lösning. **(1 p)**
   (d) Välj ett värde på a där systemet har en unik lösning och bestäm denna lösning. **(1 p)**

3. Avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}.$$

   Med linjen L menas alla vektorer på formen $L = \{(2+4t, 2+3t)\}$, godtyckliga tal t.
   (a) Avgör om punkten $P = (2,3)$ är i bildrummet för T. **(1 p)**
   (b) Bestäm nollrummet för T. **(1 p)**
   (c) Vad avbildas linjen L på genom avbildningen T? **(2 p)**

DEL B

4. Vi har ekvationssystemet i fyra okända x, y, z, w,

$$\begin{cases} x - 2z - w &= 0 \\ x + y - 4z - 3w &= 0 \end{cases}$$

Lösningsmängden till ekvationssystemet är ett delrum $V \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm en ortonormal bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ för V. **(2 p)**

(b) Verifiera att $\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}$ med $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$. **(1 p)**

(c) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på delrummet V. **(1 p)**

5. Det linjära ekvationssysemet

$$\begin{cases} x & & = 16 \\ & 3y & = 3 \\ -3x + & 2y & = -4 \\ x + & y & = -4 \\ 2x + & y & = 9 \end{cases}$$

i de två variablerna x och y är överbestämt och har ingen lösning. Det går att använda *minsta kvadratmetoden* för att finna de bästa tänkbara värdena på x och y.

(a) Ställ upp normalekvationen för systemet och bestäm minsta kvadratlösningen. **(3 p)**

(b) Vad är det som är minimerat i minsta kvadratlösningen? **(1 p)**

6. Låt $H \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett givet plan genom origo och låt $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av ortogonal projektion på planet H.

(a) Använd en normalvektor till planet H för att ge ett uttryck för $T(\vec{x})$, där $\vec{x}$ är en godtycklig vektor. **(1 p)**

(b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till T. **(2 p)**

(c) Låt $\mathcal{B}$ vara en godtycklig ON-bas för $\mathbb{R}^3$, och låt A vara matrisrepresentationen för T. Förklara varför A är en symmetrisk matris. **(1 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Vektorerna
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
ger en bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ för vektorrummet V i $\mathbb{R}^4$. Övergångsmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen $\mathcal{C}$ ges av matrisen
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$
Bestäm vektorerna i $\mathbb{R}^4$ som utgör basen $\mathcal{C}$. **(4 p)**

8. Låt $ABCD$ vara parallellogrammen med diagonalerna AC och BD. Punkten E ligger mitt på sträckan AB och punkten F delar sträckan CD i förhållandet $1 : 4$, alltså $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FD}$. Sträckorna AF och DE skär varandra i punkten P. Använd vektorberäkningar för att bestämma i vilket förhållandet sträckan AF delas av punkten P. **(4 p)**

9. Låt V_n vara vektorrummet av $n \times n$-matriser, där $n \geq 2$ är ett fixt heltal. Vi har en linjär avbildning $T\colon V_n \longrightarrow \mathbb{R}^3$, som skickar en matris X till
$$T(X) = (r(X), c(X), d(X)),$$
där $r(X)$ är summan av elementen i de två första raderna i X, $c(X)$ är summan av elementen i de två sista kolonnerna i X, och $d(X)$ är summan av diagonalelementen. Bestäm dimensionen till nollrummet av T. **(4 p)**

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2014-01-13

DEL A

1. Vi har parallellogrammen T med hörn $A = (1,1,1)$, $B = (2,3,0)$, $C = (3,2,4)$ och $D = (4,4,3)$.
   (a) Bestäm arean av parallellogrammen T. **(2 p)**
   (b) Bestäm en ekvation för planet som innehåller T. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Arean ges av längden till vektorprodukten av vektorer längs de två sidor som utgår från ett och samma hörn.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Area } = \|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\| = \sqrt{49+25+9} = \sqrt{83}.$$

(b) Vektorn $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$ är en normal vektor till planet. Planet ska innehålla punkten $D = (4,4,3)$. Evationen är:

$$-7(x-4) + 5(y-4) + 3(z-3) = 0, \quad \text{dvs} \quad -7x + 5y + 3z - 1 = 0$$

Svar.

(a) $\sqrt{83}$
(b) $-7x + 5y + 3z - 1 = 0$

2. För varje tal a har vi följande ekvationssystem i tre okända x, y och z.

$$(*)\quad \begin{cases} (a-2)x + 4y + 2z &= 1 \\ ay + z &= 2 \\ ax + 2y + z &= 3 \end{cases}$$

Vi kan också skriva ekvationssystemet som en matrisekvation $AX = B$, där $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Bestäm matrisen A. **(1 p)**
(b) Bestäm determinanten till A. **(1 p)**
(c) Bestäm för vilka tal a ekvationssystemet $(*)$ har en unik lösning. **(1 p)**
(d) Välj ett värde på a där systemet har en unik lösning och bestäm denna lösning. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Matrisen A har koefficienterna för x i första kolonnen, koefficienterna för y i den andra och koefficienterna för z i den tredje kolonnen. Vi får

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 4 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) För att få fler nollor i matrisen subtraherar vi två gånger sista raden från första och får matrisen

$$\begin{bmatrix} -a-2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(En sådan radoperation påverkar inte determinantens värde.) Utveckling längs första raden ger nu determinanten $(-a-2)(a \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 4 - a^2$.

(c) A ej inverterbar $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$.

(d) Systemet har en unik lösning om och endast om $\det A \neq 0$, dvs om och endast om $a \neq \pm 2$.

Svar.

(a) Matrisen ges av

$$A = \begin{bmatrix} a-2 & 4 & 2 \\ 0 & a & 1 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\det A = 4 - a^2$.

(c) Matrisen A är inte inverterbar då $a = \pm 2$.

(d) Systemet har unik lösning då $a \neq \pm 2$.

3. Avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Med linjen L menas alla vektorer på formen $L = \{(2+4t, 2+3t)\}$, godtyckliga tal t.

(a) Avgör om punkten $P = (2,3)$ är i bildrummet för T. **(1 p)**

(b) Bestäm nollrummet för T. **(1 p)**

(c) Vad avbildas linjen L på genom avbildningen T? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a)

$$\text{Bild}(T) = \text{im}(T) = \left\{ A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ för } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Det betyder att punkten $P = (2,3)$ är i bildrummet om systemet

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

är lösbart. Genom Gausseliminering reducerar man totalmatrisen

$$A = \left[\begin{array}{rr|r} 9 & -12 & 2 \\ -12 & 16 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ R_2 + \frac{4}{3}R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{rr|r} 9 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{array} \right]$$

Detta visar att totalmatrisen har rang 2 medan $\text{rang}(A) = 1$ och att systemet är därför icke lösbart.

(b) $\ker(T) = Null(T)$ är lösningsmängden till $AX = 0$. Eftersom $\text{rang}(A) = 1$ har systemet en fri-variabel och lösningarna ges av punkterna $(t, \frac{3}{4}t)$ där $t \in \mathbb{R}$.

$$ker(T) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

(c) Notera att $L = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ som betyder att varje vektor på linjen L kan skrivas som

$$\vec{v} = \vec{w} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ där } \vec{w} \in ker(T)$$

det betyder att $T(\vec{v}) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ för varje $\vec{v}$ i L.

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Svar.

(a) Nej, punkten $P = (2, 3)$ tillhör inte bildrummet.

(b) $\ker(T) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

(c) Hela linjen avbildas till vektorn $\begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$

DEL B

4. Vi har ekvationssystemet i fyra okända x, y, z, w,

$$\begin{cases} x - 2z - w &= 0 \\ x + y - 4z - 3w &= 0 \end{cases}$$

Lösningsmängden till ekvationssystemet är ett delrum $V \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm en ortonormal bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ för V. **(2 p)**

(b) Verifiera att $\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v}$ med $\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$. **(1 p)**

(c) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ på delrummet V. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi börjar med att bestämma en bas till lösningsmängden genom Gausselimination

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R_2 - R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

ser man att koefficientmatrisen har rang 2. Det betyder att lösningsmängden har dimension $4 - 2 = 2$. Variablerna z och w är fria och med de två parametrarna s och t får vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s + t \\ 2s + 2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi betraktar basen $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Genom Gram-Schmidt får man en ortogonal bas $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$.

$$\vec{u_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och

$$\vec{u_2} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{6}{9}\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\3\end{bmatrix}$$

För att få en ortonormal bas behöver vi också normera. Vi får att

$$\|\vec{u}_1\|^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 = 9$$

och

$$\|\vec{u}_2\|^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{18}{9} = 2$$

En ortonormal bas ges därmed efter normering av

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\3\end{bmatrix} \right\}$$

(b) Vi bestämmer först $\vec{x}\cdot\vec{u}$ och $\vec{x}\cdot\vec{v}$ där $\mathcal{B} = \{\vec{u},\vec{v}\}$ är den orthonormala bas vi hittade i a). Vi har att

$$\vec{x}\cdot\vec{u} = \frac{1}{3}(-8+4-5) = -3 \quad \text{och} \quad \vec{x}\cdot\vec{v} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4+4+10+18) = 6\sqrt{2}.$$

Detta ger att $(\vec{x}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{x}\cdot\vec{v})\vec{v}$ blir

$$-3\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\\0\end{bmatrix} + 6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-2\\-1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\2\\-5\\6\end{bmatrix},$$

vilket är vektorn $\vec{x}$.

(c) För att bestämma projektionen $\mathrm{proj}_V(\vec{w})$, med vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, använder vi oss av den orthonormala bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ vi hittade i a). Vi har nämligen att

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_V(\vec{w}) &= (\vec{w}\cdot\vec{u})\vec{u} + (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{v} \\
&= \frac{1}{3}(2+2+1+0)\vec{u} + \frac{1}{3\sqrt{2}}(-1+2-2+3)\vec{v} = \frac{5}{3}\vec{u} + \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{v} \\
&= \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 10-1 \\ 10+2 \\ 5-2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Svar.

(a) $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ (ej unik).

(b) -

(c) $\mathrm{proj}_V \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Det linjära ekvationssysemet

$$\begin{cases} x & & = & 16 \\ & 3y & = & 3 \\ -3x & + \; 2y & = & -4 \\ x & + \; y & = & -4 \\ 2x & + \; y & = & 9 \end{cases}$$

i de två variablerna x och y är överbestämt och har ingen lösning. Det går att använda *minsta kvadratmetoden* för att finna de bästa tänkbara värdena på x och y.

(a) Ställ upp normalekvationen för systemet och bestäm minsta kvadratlösningen. **(3 p)**

(b) Vad är det som är minimerat i minsta kvadratlösningen? **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi skriver om det linjära ekvationssystemet som $A\vec{x} = \vec{b}$, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \\ -4 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen ges nu av $A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}$. Vi får att

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + (-3)\cdot(-3) + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 0\cdot 3 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 + 2\cdot(-3) + 1\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot 0 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -3 & 15 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1\cdot 16 + 0\cdot 3 + (-3)\cdot(-4) + 1\cdot(-4) + 2\cdot 9 \\ 0\cdot 16 + 3\cdot 3 + 2\cdot(-4) + 1\cdot(-4) + 1\cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi löser nu normalekvationen med Gausselimination på totalmatrisen och får

$$\left[\begin{array}{cc|c} 15 & -3 & 42 \\ -3 & 15 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{r} -\frac{1}{3}R_2 \\ R_1 + 5R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -2 \\ 0 & 24 & 24 \end{array}\right] \begin{array}{r} R_1 + \frac{5}{24}R_2 \\ \frac{1}{24}R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Alltså ges minsta kvadratlösningen av $x = 3$ och $y = 1$.

(b) Det som minimeras är avståndet mellan högerled och vänsterled, dvs kvadratroten ur summan av kvadraterna av skillnaderna. I det här fallet innebär det längden av

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \\ -4 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dvs $\sqrt{13^2+0^2+(-5)^2+8^2+2^2}=\sqrt{262}$.

Svar.

(a) Minsta kvadratlösnininingen är $x=3$, $y=1$.

(b) Det som minimeras är längden av skillnadsvektorn mellan höger och vänsterled, som i det här fallet är $\sqrt{262}$.

6. Låt $H \subseteq \mathbb{R}^3$ vara ett givet plan genom origo och låt $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av ortogonal projektion på planet H.
   (a) Använd en normalvektor till planet H för att ge ett uttryck för $T(\vec{x})$, där $\vec{x}$ är en godtycklig vektor. **(1 p)**
   (b) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till T. **(2 p)**
   (c) Låt $\mathcal{B}$ vara en godtycklig ON-bas för $\mathbb{R}^3$, och låt A vara matrisrepresentationen för T. Förklara varför A är en symmetrisk matris. **(1 p)**

Lösningsförslag. a) Vi har att $T(\vec{x}) = x - \operatorname{proj}_N(\vec{x})$ där N är linjen genom origo, och normal på H. Om $\vec{n} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ är en normalvektor, nollskilld, till H, då har vi att

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

b) Alla nollskilda vektorer i H är egenvektorer till T med egenvärde 1 eftersom de avbildas på sig själva. Alla nollskilda vektorer ortogonala mot H är egenvektorer med egenvärde 0 eftersom de avbildas på nollvektorn. Inga andra egenvektorer finns, för en vektor som inte ligger i H kommer att avbildas på en vektor med en annan riktning (nämligen en som ligger i H).

c) Avbildningen T är ortogonalt diagonaliserbar då egenrummen är ortogonala. Spektralsatsen ger då att matrisrepresentationen B av T med avseende på standardbasen är symmetrisk. Om $\mathcal{B}$ är en ON-bas, låt P vara övergångsmatrisen från B till standardmatrisen. Då har vi att $A = P^TBP$. Detta ger att

$$A^T = (P^TBP)^T = (P^T)B^T(P^T)^T = P^TBP = A,$$

vilket betyder att A är symmetrisk.

Svar. Nollskilda vektorer i H är egenvektorer med egenvärde 1. Nollskilda vektorer ortogonala mot H är egenvektorer med egenvärde 0. Inga andra egenvektorer finns.

DEL C

7. Vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ger en bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ för vektorrummet V i $\mathbb{R}^4$. Övergångsmatrisen från basen $\mathcal{B}$ till basen $\mathcal{C}$ ges av matrisen

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm vektorerna i $\mathbb{R}^4$ som utgör basen $\mathcal{C}$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt $\mathcal{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$. Övergångsmatrisen från basen $\mathcal{C}$ till basen $\mathcal{B}$ ges av matrisen P^{-1}. kolumnerna i matrisen P^{-1} motsvarar koordinaterna $[\vec{w}_1]_{\mathcal{B}}, [\vec{w}_2]_{\mathcal{B}}$. Med adjunktmatrisen kan vi bestämma inversen för P och då $\det P = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = -5$ får vi

$$P^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}. = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det följer att:

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{5}(-3\vec{u} + 4\vec{v}) = -\frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{5}(2\vec{u} - 1\vec{v}) = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Svar.

(a) $\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

8. Låt $ABCD$ vara parallellogrammen med diagonalerna AC och BD. Punkten E ligger mitt på sträckan AB och punkten F delar sträckan CD i förhållandet $1:4$, alltså $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FD}$. Sträckorna AF och DE skär varandra i punkten P. Använd vektorberäkningar för att bestämma i vilket förhållandet sträckan AF delas av punkten P. **(4 p)**

Lösningsförslag. Allra först ritar vi en figur. Vi har att $AP = AE + EP$, och vi söker det tal t sådan att $tAP = AF$. V har att $tEP = ED$ och att $tAE = AE'$ för någon punkt E' på linjen genom A och B. Detta ger $AF = AE' + ED$. Vi kan också uttrycka $AF = AD + DF$, vilket ger

$$AE' = AF - ED = AD + DF - ED.$$

Ni noterar att $AD - ED = AE$, och från uppgiften har vi att $\frac{1}{4}DF = FC$ vilket ger att $DC = \frac{5}{4}DF$. Vi har också från uppgiften att $2AE = DC$. Insätter vi detta i ekvationen ovan, erhåller vi

$$AE' = AE + \frac{8}{5}AE = \frac{13}{5}AE.$$

Svar. $5:13$

9. Låt V_n vara vektorrummet av $n \times n$-matriser, där $n \geq 2$ är ett fixt heltal. Vi har en linjär avbildning $T\colon V_n \longrightarrow \mathbb{R}^3$, som skickar en matris X till
$$T(X) = (r(X), c(X), d(X)),$$
där $r(X)$ är summan av elementen i de två första raderna i X, $c(X)$ är summan av elementen i de två sista kolonnerna i X, och $d(X)$ är summan av diagonalelementen. Bestäm dimensionen till nollrummet av T. **(4 p)**

Lösningsförslag. Det verkar lättare att tänka på bildrummet till avbildningen T så vi börjar med det. Sedan kan vi använda dimensionssatsen som säger att summan av dimensionerna för bildrummet och nollrummet är lika med dimensionen för V_n, vilket är n^2 eftersom det finns n^2 element i en $n \times n$-matris.

Om $n = 2$ är $r(X) = c(X)$ så bildrummet av T innehåller bara vektorer på formen (r, r, d). Eftersom T avbildar $\begin{pmatrix} d & 0 \\ r-d & 0 \end{pmatrix}$ på (r, r, d) ligger alla sådana vektorer i bildrummet som alltså har dimension 2. Nollrummet har därför dimension $2^2 - 2 = 2$.

Om $n \geq 3$ kan vi välja en $n \times n$-matris X där alla element är noll utom $X_{1,1} = d$, $X_{2,1} = r - d$ och $X_{n,n-1} = c$. Denna matris avbildas på (r, c, d) så bildrummet till T är hela $\mathbb{R}^3$ som har dimension 3. Nollrummet har därför dimension $n^2 - 3$.

Svar. Nollrummets dimension är 2 om $n = 2$ och $n^2 - 3$ om $n \geq 3$.
