KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
1

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under . De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. De tre punkterna $A = (1,0,1)$, $B = (4,2,-1)$ och $C = (5,1,4)$ bildar en triangel i rummet. Med *höjden*, h, mot sidan AB menas avståndet från punkten C till linjen genom A och B.
   (a) Bestäm höjden h. (*Ledning*: Dela upp $\overrightarrow{AC}$ i en komposant som är parallell med $\overrightarrow{AB}$ och en som är vinkelrät mot $\overrightarrow{AB}$.) **(2 p)**
   (b) Använd resultatet från del (a) för att bestämma arean av triangeln. **(1 p)**
   (c) Beräkna arean av triangeln även med hjälp av vektorprodukten av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. **(1 p)**

2. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att:
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$
   (a) Bestäm $T\left(\left[\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right]\right)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas för nollrummet $\ker(T)$. **(2 p)**

3. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{bmatrix}-2 & 2\\-2 & 3\end{bmatrix}.$$
(3 p)
   (b) Förklara varför matrisen $B = \frac{1}{19}A$ har samma egenvektorer som matrisen A. **(1 p)**

DEL B

4. Låt $W = \mathrm{im}(A)$ vara bildrummet till matrisen
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$
Bestäm en ortonormal bas för W. **(4 p)**

5. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $3x + 4y = 0$.
   (a) Bestäm matrisen för T. **(2 p)**
   (b) Rita upp hur parallellogrammen med hörn i $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$ och $(1,3)$ avbildas genom avbildningen. **(2 p)**

6. Vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ bildar en bas $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ för delrummet W i $\mathbb{R}^4$. Matrisen
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
är övergångsmatrisen som omvandlar koordinater med avseende på basen $\mathfrak{B}$ till koordinater med avseende på basen $\mathfrak{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Bestäm vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt V vara mängden av alla 7×7-matriser. Betrakta V som $\mathbb{R}^{49}$ genom att ställa kolonnerna i matriserna under varandra.
   (a) Visa att avbildningen $T\colon V \to V$ som skickar en matris A till $A + A^T$ är en linjär avbildning. **(2 p)**
   (b) Visa att de nollskilda symmetriska matriserna är egenvektorer för T. **(2 p)**

8. Låt $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. Vi säger att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ är en *dual bas* för $\mathbb{R}^n$ om

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{om } i \neq j, \\ 1, & \text{om } i = j. \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Visa att villkoren (1) innebär att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ faktiskt utgör en bas för $\mathbb{R}^n$. **(2 p)**
   (b) Låt $n = 3$ och bestäm en dual bas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ om

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (2 p)

9. Visa att det för 2×2-matriser A gäller att om $A^k = 0$, för något heltal $k > 2$, så är också $A^2 = 0$. **(4 p)**

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2013-06-04

DEL A

1. De tre punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (4, 2, -1)$ och $C = (5, 1, 4)$ bildar en triangel i rummet. Med *höjden*, h, mot sidan AB menas avståndet från punkten C till linjen genom A och B.
   (a) Bestäm höjden h. (*Ledning*: Dela upp $\overrightarrow{AC}$ i en komposant som är parallell med $\overrightarrow{AB}$ och en som är vinkelrät mot $\overrightarrow{AB}$.) **(2 p)**
   (b) Använd resultatet från del (a) för att bestämma arean av triangeln. **(1 p)**
   (c) Beräkna arean av triangeln även med hjälp av vektorprodukten av $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. **(1 p)**

Lösningsförslag. a) Vi vill dela upp $\vec{AC} = \text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) + \vec{AC}^{\perp}$ och använder att (se t.ex. geometrihäftet Prop 4.5)

$$\text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\vec{AB} \cdot \vec{AB}} \vec{AB}.$$

Vi har $\vec{AB} = B - A = (3, 2, -2)$ och $\vec{AC} = C - A = (4, 1, 3)$ så $\text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) = \frac{8}{17}(3, 2, -2)$. Då följer att $\vec{AC}^{\perp} = \vec{AC} - \text{proj}_{\vec{AB}}(\vec{AC}) = \frac{1}{17}(44, 1, 67)$. Höjden h i triangeln är precis längden på vektorn $\vec{AC}^{\perp}$, det vill säga $h = ||\vec{AC}^{\perp}|| = \frac{1}{17}\sqrt{44^2 + 1^2 + 67^2} = \frac{1}{17}\sqrt{6426} = \frac{3}{17}\sqrt{714}$.

b) Arean är basen gånger höjden genom två

$$\frac{h \cdot ||\vec{AB}||}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{17}\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{42}.$$

c) Längden på kryssprodukten (vektorprodukten) av två vektorer ger arean av det uppspända parallellogrammet. Triangeln är hälften av detta parallellogram. Arean av triangeln är alltså $\frac{1}{2}||\vec{AB} \times \vec{AC}|| = \frac{1}{2}||(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix})|| = \frac{1}{2}||(8, 17, -5)|| = \frac{1}{2}\sqrt{378} = \frac{3}{2}\sqrt{42}$,

vilket bekräftar areaberäkningen i b).

Svar.

(a) Höjden är $\frac{1}{17}\sqrt{6426}$.

(b) Arean är $\frac{3}{2}\sqrt{42}$.

(c) -

2. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vara en linjär avbildning sådan att:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$

(a) Bestäm $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)$. **(2 p)**

(b) Bestäm en bas för nollrummet $\ker(T)$. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Låt M_T vara matrisen för den linjära avbildningen T. Uppgiften ger då att

$$M_T \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Med någon av metoderna vi lärt oss beräknar vi $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$. Vi multiplicerar med denna invers från höger i båda leden och får

$$M_T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\3 & -2 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Specielt har vi att $T(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})$ är

$$M_T \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y\\0\\3x-2y-z\\0\end{bmatrix}.$$

b) Vi söker alla vektorer sådan att $T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}y\\0\\3x-2y-z\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. Detta ger att $y = 0$, och sedan att $z = 3x$. Vektorer av formen $\begin{bmatrix}x\\0\\3x\end{bmatrix}$ utgör nollrummet till avbildningen. En bas får vi vid att sätta $x = 1$.

Svar.

(a) Vi har $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 3x - 2y - z \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Vi har att en bas för $\ker(T)$ är $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(3 p)

(b) Förklara varför matrisen $B = \frac{1}{19}A$ har samma egenvektorer som matrisen A.

(1 p)

Lösningsförslag. a) Vi behöver lösa $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. Egenvärdena är alltså $\lambda = -1$ och $\lambda = 2$. Med bokens beteckningar får vi

$$E_{-1} = \ker(A+I) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \text{och}$$

$$E_2 = \ker(A-2I) = \ker \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Om v_A är en egenvektor till A så betyder det att $Av_A = \lambda v_A$ för något λ. Men då är $Bv_A = \frac{1}{19}Av_A = \frac{1}{19}\lambda v_A$ och därför är v_A en egenvektor även för B. Om v_B är en egenvektor för B kan samma resonemang visa att den också är en egenvektor för A.

Alternativt kan man säga att en egenvektor beskriver en riktning i rummet som lämnas oförändrad av den linjära avbildningen som ges av A. Att multiplicera med skalären $\frac{1}{19}$ påverkar inte vilka riktningar som är oförändrade och därför har A och B samma egenvektorer.

Svar.

(a) Egenvektorer är $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) -

DEL B

4. Låt $W = \mathrm{im}(A)$ vara bildrummet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortonormal bas för W. **(4 p)**

Lösningsförslag. 4. Vi börjar med att medelst elementära radoperationer göra om A till radreducerad form. Vi tar och adderar - 1 rad 1 till andra raden, och 2 rad 1 till tredje och fjärde raden. Detta ger

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi ser nu att att rad 3 och rad 4 är en skalärmultippel av rad 2. Den reducerade trappstegsmatrisen blir

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rangen är två, vilket också är dimensionen till W. Kolumn ett och kolumn tre i matrisen A är linjärt oberoende, och därför en bas för W. Vi använder Gram-Schmidt för att producera en orthonormal bas. Vi låter

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, -1, 2, 2)$$

som är en vektor av längd ett. Vi fortsätter med att beräkna $v_2 = (1, 2, 1, 0) - \mathrm{Proj}_{u_1}(1, 2, 1, 0)$. Projektionen av vektorn $(1, 2, 1, 0)$ ned på linjen som spänns upp av u_1 är

$$\mathrm{Proj}_{u_1}(1, 2, 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1 - 2 + 2 + 0)u_1 = \frac{-1}{10}(-1, -1, 2, 2).$$

Detta ger att

$$v_2 = (1, 2, 1, 0) + \frac{1}{10}(-1, -1, 2, 2) = \frac{1}{10}(9, 19, 12, 2).$$

Nu är $\{u_1, v_2\}$ en orthogonal bas. Vektor u_1 har längd ett, och vektorn $u_2 = \frac{1}{|v_2|}v_2$ har också längd 1. Vi har att

$$9^2 + 19^2 + 12^2 + 2^2 = 81 + 361 + 144 + 4 = 590.$$

Detta ger att vektorn v_2 har längd $\frac{\sqrt{590}}{10}$. Den sökta vektorn

$$u_2 = \frac{10}{\sqrt{590}} \frac{1}{10}(9, 19, 12, 2).$$

Svar.

(a) En ortonormal bas ges av

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\\2\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{590}}\begin{bmatrix}9\\19\\12\\2\end{bmatrix}$$

.

5. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $3x + 4y = 0$.
   (a) Bestäm matrisen för T. **(2 p)**
   (b) Rita upp hur parallellogrammen med hörn i $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ och $(1, 3)$ avbildas genom avbildningen. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Linjen går genom origo och i riktning av vektorn $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Vi vill spegla en vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i denna linje. Då gäller att $\mathrm{ref}_{\vec{u}}(\vec{x}) = 2\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}) - \vec{x}$. Vi använder $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{x}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{x}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u} = \frac{4x_1-3x_2}{25}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ och får

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{ref}_{\vec{u}}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \frac{8x_1 - 6x_2}{25}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$
$$\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7x_1 - 24x_2 \\ -24x_1 - 7x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

b) Vi har från formeln i a) att $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -17 \\ -31 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -48 \\ -14 \end{bmatrix}$ och $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -13 \\ -9 \end{bmatrix}$.

Svar.

(a) Matrisen för speglingen T är $\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$.

(b) -

6. Vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$ och $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$ bildar en bas $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ för delrummet W i $\mathbb{R}^4$. Matrisen

$$S = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

är övergångsmatrisen som omvandlar koordinater med avseende på basen $\mathfrak{B}$ till koordinater med avseende på basen $\mathfrak{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Bestäm vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. **(4 p)**

Lösningsförslag. I basen $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ har basvektorn $\vec{u}_1$ koordinater 1 och 0 (för $\vec{u}_1 = 1\vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2$) som vi skriver som koordinat-kolonnvekor $[\vec{u}_1]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Enligt antagandet omvandlar matrisen $S = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ koordinater i basen $\mathfrak{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ till koordinater i basen $\mathfrak{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Med andra ord får vi koordinater i basen $\mathfrak{C}$ för basvektorn $\vec{u}_1$ enligt följande

$$[\vec{u}_1]_{\mathfrak{C}} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \text{ (=kolonn 1 i matrisen S).}$$

Alltså

$$1\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = \vec{u}_1 \text{ (ekv 1) .}$$

På samma sätt får vi

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = \vec{u}_2 \text{ (ekv 2) .}$$

Från ekvationssystemet bestämmer vi $\vec{v}_1$och $\vec{v}_2$:
T. ex. -3ekv1 +2 ekv2 ger

$$\vec{v}_1 = -3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = -3\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-6\\-2\\5\end{bmatrix}$$

På liknande sätt 2ekv1 - ekv2 ger

$$\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = 2\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\\1\\-3\end{bmatrix}$$

.

Svar.

(a) Vi har vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\-6\\-2\\5\end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\4\\1\\-3\end{bmatrix}$

DEL C

7. Låt V vara mängden av alla 7×7-matriser. Betrakta V som $\mathbb{R}^{49}$ genom att ställa kolonnerna i matriserna under varandra.
   (a) Visa att avbildningen $T\colon V \to V$ som skickar en matris A till $A + A^T$ är en linjär avbildning. **(2 p)**
   (b) Visa att de nollskilda symmetriska matriserna är egenvektorer för T. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi kollar de två villkoren på linearitet, se Theorem 2.1.3 i läroboken. Låt A och B vara matriser och $k \in \mathbb{R}$
i) $T(A+B) = (A+B)+(A+B)^T = A+B+A^T+B^T = A+A^T+B+B^T = T(A)+T(B)$
och
ii) $T(kA) = kA + (kA)^T = kA + kA^T = k(A + A^T) = kT(A)$.
T är alltså en linjär avbildning.

b) Matrisen A är en egenvektor till T om $T(A) = \lambda A$, något $\lambda \in \mathbb{R}$. Om A är en symmetrisk matris så är $A = A^T$ och vi får $T(A) = A + A^T = 2A$. Alltså är varje nollskild symmetrisk matris en egenvektor till T.

Svar.
(a) -
(b) -

8. Låt $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$. Vi säger att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ är en *dual bas* för $\mathbb{R}^n$ om

$$\vec{u}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0, & \text{om } i \neq j, \\ 1, & \text{om } i = j. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Visa att villkoren (1) innebär att $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ faktiskt utgör en bas för $\mathbb{R}^n$.

(2 p)

(b) Låt $n = 3$ och bestäm en dual bas $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ om

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

Lösningsförslag. a) Om $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ inte är en bas för $\mathbb{R}^n$ så finns det en linjär relation mellan dem, dvs vi kan skriva $\sum_{j=1}^{n} k_j \vec{v_j} = 0$, $k_j \in \mathbb{R}^n$ där inte alla k_j är noll. Välj en koordinat i så att $k_i \neq 0$ och multiplicera med $\vec{u_i}$ på båda sidor. Villkoret $\vec{v_i} \cdot \vec{u_j} = 0$, för $i \neq j$ i uppgiften gör då att all termer i högerledet försvinner utom k_i, så att $0 = k_i$, vilket är en motsägelse och alltså måste $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$.

b) Om vi låter V vara matrisen som har $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ och $\vec{v_3}$ som radvektorer och U vara matrisen som har $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ och $\vec{u_3}$ som kolumnvektorer så är villkoret för en dual bas samma som $VU = I$ eller $V = U^{-1}$. Vi bestämmer nu inversen till $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och får $U^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Raderna i denna matris är alltså vektorerna $\vec{v_i}$.

Svar.

(a) -

(b) En dual basen är $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

9. Visa att det för 2×2-matriser A gäller att om $A^k = 0$, för något heltal $k > 2$, så är också $A^2 = 0$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi betraktar dimensionen av $\text{im}(A)$. Om bildrummet har dimension 2, så avbildas bara origo på origo och samtliga andra punkter ´´överlever´´avbildningen. Det gör att upprepade avbildningar med A, dvs A^k alla kommer också att ha bildrum av dimension 2. En motsägelse mot förutsättningarna $A^k = 0$ i uppgiften. Om bildrummet har dimension 0, så måste A vara nollmatrisen och då är förstås A^2 också det. Om bildrummet av A är endimensionellt, $\text{im}(A) = \text{span}\left\{\vec{v}\right\}$ för en nollskild vektor $\vec{v}$, så delar vi in i två fall.
I) Vektorn $\vec{v}$ är en egenvektor till A, så att $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Då är $A^2\vec{v} = A\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$ och per induktion $A^k\vec{v} = \lambda^k\vec{v}$, så $A^k \neq 0$ för alla k.
II) Vektorn $\vec{v}$ är inte en egenvektor till A. Då avbildar A vektorn $\vec{v}$ på ett lägredimensionellt delrum av $\text{im}(A)$ vilket måste vara origo. Det betyder att $A\vec{v} = 0$. För en godtycklig vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ så gäller att $A\vec{u} = k_u\vec{v}$ för något $k_u \in \mathbb{R}$ eftersom vi antagit att $\dim(\text{im}(A)) = 1$. Tillsammans får vi att $A^2\vec{u} = Ak_u\vec{v} = k_uA\vec{v} = k_u0 = 0$, så A^2 är nollmatrisen.

Alternativt. Vi visar först fallet när matrisen A är diagonaliserbar, $PAP^{-1} = D$ en diagonalmatris. Av antagendet $A^k = 0$ följer det att $D^k = 0$, vilket igen medför att diagonalelmenten i D är alla noll. Detta ger att $A = 0$, och specielt att $A^2 = 0$.

Vi antar nu att A inte är diagonaliserbar. Vi har att $A^k = 0$, vilket ger att $\det(A) = 0$, och följdaktligen är inte rangen till A maximal. Detta betyder att det finns åtminstonde en icke-noll vektor $\vec{e}$ i nollrummet till avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som matrisen A representerar. Låt $\vec{e}$ vara ett element i en bas $(\vec{e}, \vec{f})$ för $\mathbb{R}^2$. Matrisrepresentationen av T med avseende på basen $(\vec{e}, \vec{f})$ kommer att ha formen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Om koefficienten $b \neq 0$ då har matrisen B, och då också matrisen A, två olika egenvärden. I det fallet är A diagonaliserbar, vilket vi redan har behandlat ovan. Därmed har vi att koefficient $b = 0$ i matrisen B, och matrisen B är övretriangulär. Vi ser att $B^2 = 0$. Om P är övergångsmatrisen från basen $(\vec{e}, \vec{f})$ till standardbasen har vi relationen $P^{-1}AP = B$. Det följer nu att $A^2 = 0$.

Svar.
(a)
(b)