KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 12 mars, 2012

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 2, 2011 och period 3, 2012. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Betrakta ekvationssystemet i de tre obekanta x, y och z, som ges av

$$\begin{cases} x & + & (1-a)y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & ay & + & 3z & = & 1 \\ x & + & (2a-1)y & + & az & = & a \end{cases}$$

där a är en konstant.

(a) Bestäm lösningsmängden i det fall då $a = 1$. **(2 p)**

(b) Undersök för vilka värden på konstanten a som ekvationssystemet har precis en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning. **(2 p)**

2. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x - 3y - 5z = 0$.

(a) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**

(b) Bestäm en bas för bildrummet, $\mathrm{im}(T)$. **(2 p)**

3. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm egenvärdena till matrisen A och förklara varför A är diagonaliserbar. **(2 p)**

(b) Bestäm en matris S sådan att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. **(2 p)**

DEL B

4. Låt $W \subseteq \mathbb{R}^4$ vara delrummet som ges av ekvationen
$$x - 2y + 3z + w = 0.$$
(a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\operatorname{im}(T)$ är W. **(3 p)**
(b) Varför finns det ingen linjär avbildning $S\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\operatorname{im}(S)$ är W? **(1 p)**

5. En linje $(x, y, z) = (4 + 3t, 5t, t - 2)$ och ett plan med ekvation $2x + y - 2z - 3 = 0$ är givna. När linjen projiceras på planet fås en ny linje som ligger i planet. Bestäm denna linje. **(4 p)**

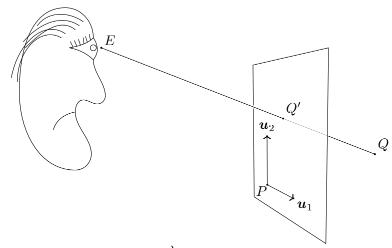
6. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$
och låt $\mathfrak{B}$ vara basen som ges av vektorerna
$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
(a) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på basen $\mathfrak{B}$. **(2 p)**
(b) Bestäm koordinatvektorn, $[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}}$, där $\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. **(2 p)**

DEL C

7. Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de två vektorerna
$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$
(a) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$. **(2 p)**
(b) Skriv vektorn
$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
som en summa $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, där $\vec{u}$ ligger i W och $\vec{v}$ ligger i $W^\perp$. **(2 p)**

Var god vänd!

8. Inom datorgrafiken är ett av de grundläggande problemen att projicera punkter i en tredimensionell scen på en två-dimensionell datorskärm. En vanlig projektionsmetod är att från den punkt Q i scenen som ska projiceras bilda en rät linje till en tänkt betraktare E. Den punkt Q' där linjen skär skärmens plan är projektionspunkten av Q. I skärmens plan införs ett koordinatsystem genom att välja ett origo i punkten P och två basvektorer $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.



   (a) Ange med hjälp av vektorerna $\overrightarrow{OP}$, $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ ett uttryck för vektorn från origo O (i rummet) till en punkt Q' som har koordinater (s_1, s_2) i skärmens koordinatsystem. **(1 p)**

   (b) Använd (a)-delen och linjen genom E och Q för att skriva upp en vektorekvation för punkten Q'. De tre obekanta i ekvationen kommer att vara s_1, s_2 och linjens parameter. **(1 p)**

   (c) Visa att punkten Q' har koordinaterna

$$\left(\frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}{\vec{u}_1\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}, \frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}{\vec{u}_2\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}\right)$$

   i skärmens koordinatsystem genom att ta skalärprodukten av ekvationen med $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ respektive $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2$. **(2 p)**

9. Låt T vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^5$ vars nollrum, $\ker(T)$, har dimension 1. Låt V vara ett 3-dimensionellt delrum av $\mathbb{R}^4$. Låt $S\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^5$ vara den avbildning som fås genom att använda avbildningen T bara på vektorer i V. Avgör vilka möjligheter det finns för dimensionen av bildrummet $\operatorname{im}(S)$. **(4 p)**

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2012-03-12

DEL A

1. Betrakta ekvationssystemet i de tre obekanta x, y och z, som ges av

$$\begin{cases} x + (1-a)y + 2z = 0 \\ 2x + ay + 3z = 1 \\ x + (2a-1)y + az = a \end{cases}$$

där a är en konstant.

(a) Bestäm lösningsmängden i det fall då $a = 1$. **(2 p)**

(b) Undersök för vilka värden på konstanten a som ekvationssystemet har precis en lösning, oändligt många lösningar, respektive ingen lösning. **(2 p)**

Lösning. (a) Vi sätter in $a = 1$ i ekvationssystemet och får ett ekvationssystem med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Med Gauss-Jordans metod kan vi överföra totalmatrisen till reducerad trappstegsform och får då

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi har två ledande ettor och en fri variabel. Vi inför en parameter t och får lösninsmängden som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 1+t \\ t \end{bmatrix},$$

där t är en reell parameter.

(b) I allmänhet får vi totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 1 & 2a-1 & a & a \end{array}\right]$$

och Gausselimination ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 1 & 2a-1 & a & a \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2-2r_1 \\ r_3-r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 3a-2 & -1 & 1 \\ 0 & 3a-2 & a-2 & a \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3-r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 0 & 3a-2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array}\right].$$

Om $a \neq \frac{2}{3}$ och $a \neq 1$ får vi en ledande etta i varje kolonn och systemet har en unik lösning.
Om $a = 1$ får vi oändligt många lösningar enligt del (a).
Om $a = \frac{2}{3}$ får vi ingen ledande etta i andra kolonnen och vi får fortsätta ett steg till och får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3+\frac{1}{3}r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{array}\right].$$

Systemet är nu inkonsistent och det saknas lösning.

$\square$

Svar:

(a) Lösningsmängden är $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 1+t \\ t \end{bmatrix}$, där t är en reell parameter.

(b) När $a = 1$ finns oändligt många lösningar, när $a = \frac{2}{3}$ saknas lösning och annars finns en unik lösning.

2. Låt $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $x - 3y - 5z = 0$.
   (a) Bestäm en bas för nollrummet, $\ker(T)$. **(2 p)**
   (b) Bestäm en bas för bildrummet, $\operatorname{im}(T)$. **(2 p)**

Lösning. (a) De vektorer som tillhör nollrummet $\ker(T)$ är de vektorer som projiceras till nollvektorn under projektionen T. Detta är precis de vektorer som är ortogonala mot planet, dvs parallella med normalvektorn

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Därmed utgör $\vec{n}$ en bas för nollrummet, $\ker(T)$.

(b) Bildrummet till projektionen är alla vektorer i planet med ekvation $x - 3y - 5z = 0$. För att bestämma en bas för detta kan vi se det som nollrummet till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ och eftersom den redan är på reducerad trappstegsform ser vi att lösningsmängden kan skrivas som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s + 5t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där s och t är reella parametrar. Därmed utgör vektorerna

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för bildrummet $\operatorname{im}(T)$.

□

Svar:

(a) En bas för nollrummet $\ker(T)$ ges av normalvektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

(b) En bas för bildrummet $\operatorname{im}(T)$ ges av exempelvis vektorerna $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm egenvärdena till matrisen A och förklara varför A är diagonaliserbar. **(2 p)**

(b) Bestäm en matris S sådan att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. **(2 p)**

Lösning. (a) Egenvärdena till A ges av rötterna till den karaktäristiska ekvationen $\det(A - xI_2) = 0$ och vi beräknar det karaktäristiska polynomet $f_A = \det(A - xI_2)$ till

$$f_A(x) = \det \begin{bmatrix} 5-x & -2 \\ 7 & -4-x \end{bmatrix} = (5-x)(-4-x)-(-2)\cdot 7 = -20+4x-5x+x^2+14 = x^2-x-6.$$

Vi kan använda kvadratkomplettering för att lösa ekvationen $f_A(x) = 0$ och får

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 = 0 \quad &\iff \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0 \\ &\iff \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \iff \quad x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2} \quad \iff \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Alltså ges egenvärdena av $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$ och $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$.
Vi ser att A är diagonliserbar i och med att den är en 2×2-matris som har *två olika* egenvärden.

(b) För att bestämma en matris som diagonaliserar A behöver vi bestämma en bas av egenvektorer till A. För egenvärdet $\lambda_1 = 3$ behöver vi lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

och med Gauss-Jordans metod får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_1 \\ r_2 - \frac{7}{2}r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Lösningsmängden ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

där t är en reell parameter. Vi får en bas för egenrummet av egenvektorn $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$
För egenvärdet $\lambda_1 = -2$ behöver vi lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

och med Gauss-Jordans metod får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{7}r_1 \\ r_2 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Egenvektorerna med egenvärde -2 är alltså nollskilda vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7}t \\ t \end{bmatrix}$$

och om vi väjler $t = 7$ får vi egenvektorn $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$
Matrisen S som diagonaliserar A kan därmed väljas till

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att utföra matrismultiplikationen och får

$$S^{-1}AS = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -14 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\square$

Svar:

(a) Egenvärdena är 3 och -2 och eftersom de är olika är matrisen diagonaliserbar.

(b) En sådan matris är $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

DEL B

4. Låt $W \subseteq \mathbb{R}^4$ vara delrummet som ges av ekvationen

$$x - 2y + 3z + w = 0.$$

(a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\mathrm{im}(T)$ är W. **(3 p)**

(b) Varför finns det ingen linjär avbildning $S\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ vars bildrum $\mathrm{im}(S)$ är W? **(1 p)**

Lösning. (a) För att bildrummet ska vara lika med W ska alla kolonner i matrisen för T ligga i W och det ska finnas några av dem som utgör en bas för W.

Vi kan bestämma en bas för W genom att betrakta det som nollrummet till matrisen $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Vi inför tre parametrar för de tre fria variablerna och får lösningsmängden som

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r - 3s - t \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Därmed utgör vektorerna

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för W. Vi kan nu välja vår avbildning T sådan att matrisen har dessa tre vektorer som tre av sina kolonner. Den fjärde kolonnen kan väljas godtyckligt i W, exempelvis som nollvektorna.

Alltså ger matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

en sådan avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

(b) Enligt dimensionssatsen har vi

$$\dim \ker(S) + \dim \mathrm{im}(S) = 2$$

och därmed kan inte bildrummet, $\mathrm{im}(S)$ vara lika med W som är tredimensionellt.

□

Svar:

(a) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ger en avbildning $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ med $\operatorname{im}(T) = W$.

5. En linje $(x, y, z) = (4 + 3t, 5t, t - 2)$ och ett plan med ekvation $2x + y - 2z - 3 = 0$ är givna. När linjen projiceras på planet fås en ny linje som ligger i planet. Bestäm denna linje. **(4 p)**

Lösning. Linjens riktningsvektor är $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ och planets normalvektor är

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

För att få riktningsvektorn för den sökta linjen projicerar vi $\vec{v}$ på planet och vi kan göra det genom att dra bort projektionen av $\vec{v}$ på $\vec{n}$ från $\vec{v}$.

Alltså får linjen riktningsvektor

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{v} - \mathrm{Proj}_{\vec{n}}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-2)}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan kontrollera att $\vec{u}$ ligger i planet genom $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = 0$.

För att finna en punkt på linjen konstaterar vi att skärningspunkten mellan linjen och planet ligger på den sökta linjen och vi får fram den genom att sätta in uttrycket $(x, y, z) = (4 + 3t, 5t, t - 2)$ i planets ekvation och lösa ut t. Vi får

$$2(4 + 3t) + 5t - 2(t - 2) - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 9 + 9t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = -1.$$

Alltså ligger punkten $(x, y, z) = (4 + 3 \cdot (-1), 5 \cdot (-1), -1 - 2) = (1, -5, -3)$ i planet.

Projektionen av linjen på planet kan därmed skrivas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

□

Svar: Projektionen av linjen på planet ges av $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

6. Låt $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

och låt $\mathfrak{B}$ vara basen som ges av vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm matrisen för avbildningen T med avseende på basen $\mathfrak{B}$. **(2 p)**

(b) Bestäm koordinatvektorn, $[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}}$, där $\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. **(2 p)**

Lösning. (a) Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

omvandlar koordinater från basen $\mathfrak{B}$ till standardbasen. Vi kan därmed beräkna matrisen för T med avseende på basen $\mathfrak{B}$ som $B = S^{-1}AS$.

Vi kan invertera matrisen S genom Gauss-Jordans metod och får

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Alltså har vi

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$T(\vec{u}_1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och

$$T(\vec{u}_2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi kan omvandla koordinaterna för $\vec{x}$ till basen $\mathfrak{B}$ och sedan använda matrisen B, eller först använda matrisen A och sedan omvandla koordinater till basen $\mathfrak{B}$. I det första fallet får vi

$$[\vec{x}]_{\mathfrak{B}} = S^{-1}\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Med matrisen B får vi nu

$$[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

På det andra sättet får vi

$$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$$

och

$$[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}} = S^{-1}T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 10 - 1 \cdot 16 \\ -1 \cdot 10 + 1 \cdot 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(a) Matrisen för T med avseende på basen $\mathfrak{B}$ ges av $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $[T(\vec{x})]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$.

DEL C

7. Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av de två vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$. **(2 p)**

(b) Skriv vektorn

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som en summa $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, där $\vec{u}$ ligger i W och $\vec{v}$ ligger i $W^\perp$. **(2 p)**

Lösning. (a) Det ortogoala komplementet $W^\perp$ består av alla vektorer som är ortogonala mot både $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$. Det innebär att $W^\perp$ är nollrummet till matrisen med $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ som rader. Vi bestämmer en bas för detta med Gauss-Jordans metod:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + 2r_2 \\ -r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Med de två fria variablerna x_3 och x_4 inför vi parametrar s och t, vilket ger lösningarna som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6s + t \\ 4s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså utgör vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en bas för $W^\perp$.

(b) Vi kan välja att antingen projicera antingen på W eller på $W^\perp$. Om vi väljer att projicera på W ordnar vi först en ortogonal bas genom att använda Gram-Schmidts metod. Vi ersätter då $\vec{u}_2$ med

$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 - \mathrm{Proj}_{\vec{u}_1}\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{10}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu projicera $\vec{x}$ på W genom summan av projektionerna på de båda basvektorerna

$$\mathrm{Proj}_W \vec{x} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Den del av $\vec{x}$ som ligger i $W^\perp$ är nu

$$\mathrm{Proj}_{W^\perp}\vec{x} = \vec{x} - \mathrm{Proj}_W \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Med skalärprodukten kan vi kontrollera att $\vec{u} = \mathrm{Proj}_W \vec{x}$ är ortogonal mot basvektorerna i $W^\perp$ och att $\mathrm{Proj}_{W^\perp}\vec{x}$ är ortogonal mot basvektorerna i W.

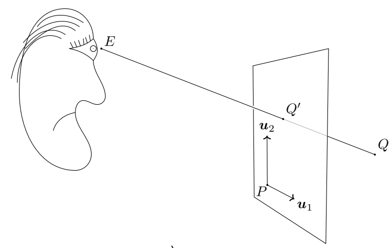
□

Svar:

(a) Vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ utgör en bas för $W^\perp$.

(b) Vi har $\vec{u} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$.

8. Inom datorgrafiken är ett av de grundläggande problemen att projicera punkter i en tredimensionell scen på en två-dimensionell datorskärm. En vanlig projektionsmetod är att från den punkt Q i scenen som ska projiceras bilda en rät linje till en tänkt betraktare E. Den punkt Q' där linjen skär skärmens plan är projektionspunkten av Q. I skärmens plan införs ett koordinatsystem genom att välja ett origo i punkten P och två basvektorer $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$.



(a) Ange med hjälp av vektorerna $\overrightarrow{OP}$, $\vec{u}_1$ och $\vec{u}_2$ ett uttryck för vektorn från origo O (i rummet) till en punkt Q' som har koordinater (s_1, s_2) i skärmens koordinatsystem. **(1 p)**

(b) Använd (a)-delen och linjen genom E och Q för att skriva upp en vektorekvation för punkten Q'. De tre obekanta i ekvationen kommer att vara s_1, s_2 och linjens parameter. **(1 p)**

(c) Visa att punkten Q' har koordinaterna

$$\left(\frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}{\vec{u}_1\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2)}, \frac{\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}{\vec{u}_2\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1)}\right)$$

i skärmens koordinatsystem genom att ta skalärprodukten av ekvationen med $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ respektive $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_2$. **(2 p)**

Lösning. (a) Att punkten Q' har koordinater (s_1, s_2) i skärmens koordinater betyder att vektorn $\overrightarrow{PQ}$ kan skrivas som $s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$. Vektorn från origo O till Q' ges därmed av

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP} + s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2.$$

(b) Linjen genom E och Q kan skrivas som $\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{EQ}$ för en parameter t och vi får vektorekvationen

$$\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{OP} + s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$$

som kan förenklas genom att se att $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PE}$ och vi får då

(1) $$\overrightarrow{PE} + t\overrightarrow{EQ} = +s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2.$$

(c) Genom att ta skalärprodukten av Ekvation 1 med $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ får vi

$$(\overrightarrow{PE} + t\overrightarrow{EQ})\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1) = (s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2)\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1).$$

och eftersom $\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1$ är ortogonal mot både $\overrightarrow{EQ}$ och $\vec{u}_1$ förenklas ekvationen till

$$\overrightarrow{PE}\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1) = s_2\vec{u}_2\cdot(\overrightarrow{EQ}\times\vec{u}_1).$$

Därmed kan vi lösa ut s_2 som

$$s_2 = \frac{\overrightarrow{PE} \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_1)}{\vec{u}_2 \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_1)}.$$

På motsvarande sätt tar vi skalärprodukten med $\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2$ och får

$$\overrightarrow{PE} \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2) = s_1 \vec{u}_1 \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2)$$

där vi löser ut s_1 som

$$s_1 = \frac{\overrightarrow{PE} \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2)}{\vec{u}_1 \cdot (\overrightarrow{EQ} \times \vec{u}_2)}.$$

$\square$

Svar:

(a) Vektorn till punkten Q' i skärmens plan kan skrivas $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP} + s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$.

(b) Ekvationen kan skrivas $\overrightarrow{PE} + t\overrightarrow{EQ} = s_1\vec{u}_1 + s_2\vec{u}_2$.

9. Låt T vara en linjär avbildning från $\mathbb{R}^4$ till $\mathbb{R}^5$ vars nollrum, $\ker(T)$, har dimension 1. Låt V vara ett 3-dimensionellt delrum av $\mathbb{R}^4$. Låt $S\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^5$ vara den avbildning som fås genom att använda avbildningen T bara på vektorer i V. Avgör vilka möjligheter det finns för dimensionen av bildrummet $\mathrm{im}(S)$. **(4 p)**

Lösning. En vektor som ligger i $\ker(S)$ ligger i V och uppfyller $S(\vec{x}) = \vec{0}$, men då gäller också att $T(\vec{x}) = \vec{0}$, eftersom S fås genom att använda T på vektorer i V. Alltså kommer $\ker(S) \subseteq \ker(T)$. Eftersom $\ker(T)$ är endimensionellt kan ett delrum av $\ker(T)$ ha dimension noll eller ett. Dimensionen är noll om V inte innehåller någon nollskild vektor från $\ker(T)$ och ett om $\ker(T)$ ligger helt i V. Båda situationerna kan förekomma och enligt dimensionssatsen får vi att dimensionen för bildrummet $\mathrm{im}(S)$ antingen är $\dim(V) - \dim(\ker(S)) = 3 - 0 = 3$ eller $\dim V - \dim(\ker(S)) = 3 - 1 = 2$. □

Svar: Dimensionen för bildrummet $\mathrm{im}(S)$ kan vara två eller tre.