KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Måndagen den 17 oktober, 2011

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. De tre första uppgifterna, som utgör del A, kan ersättas med resultat från den löpande examinationen under period 1, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning ger 4 poäng. Varje godkänt seminarium ger 1 poäng på uppgift 3. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(3, 5, 5)$ och $(4, 5, 7)$ och som är vinkelrätt mot planet med ekvation $x + y + z - 7 = 0$. **(4)**

2. Givet vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Visa att $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. **(2)**
   (b) Skriv vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$. **(2)**

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Beräkna determinanten för A. **(2)**
   (b) Beräkna $\det((A^T A)^{-5})$. **(2)**

DEL B

4. Bestäm matrisen för en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vars bildrum, $\mathrm{im}(T)$, ges av planet med ekvation $x + 3y - 7z = 0$. **(4)**

5. Betrakta matrisen
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$
   (a) Kontrollera att $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ är en egenvektor till A. **(1)**
   (b) Bestäm samtliga egenvärden till A och bestäm en bas för varje egenrum till A. **(3)**

6. Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som har en bas B som består av vektorerna
$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Vilken av vektorerna
$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   ligger i W? **(2)**
   (b) Bestäm koordinatvektorn med avseende på basen B för den av vektorerna som ligger i W. **(2)**

Var god vänd!

DEL C

7. Det finns många linjära avbildningar $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som bevarar area och avbildar vektorn $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ på vektorn $\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]$. Bestäm alla sådana linjära avbildningar. **(4)**

8. Låt $\vec{u}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ med ett rätvinkligt koordinatsystem. Vinkeln mellan $\vec{u}$ och x-axeln är $60°$ och vinkeln mellan $\vec{u}$ och y-axeln är $45°$. Bestäm vinkeln mellen $\vec{u}$ och z-axeln. **(4)**

9. Visa att om det finns någon bas i $\mathbb{R}^n$ vars vektorer är egenvektorer till de båda $n \times n$-matriserna A och B så *kommuterar* dessa, dvs $AB = BA$.

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2011-10-17

DEL A

(1) Bestäm en ekvation för det plan som innehåller punkterna $(3,5,5)$ och $(4,5,7)$ och som är vinkelrätt mot planet med ekvation $x+y+z-7=0$. **(4)**

Lösning. För att bestämma en ekvation för planet kan vi först bestämma en normalvektor, $\vec{n}$. Denna ska vara ortogonal mot normalvektorn till det andra planet och mot vektorn mellan de två givna punkterna i planet, dvs mot

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix}4\\5\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Därmed kan vi använda vektorprodukten för att bestämma $\vec{n}$ som

$$\vec{n} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2 - 1\cdot 0\\1\cdot 1 - 1\cdot 2\\1\cdot 0 - 1\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

Vi har nu att ekvationen kan skrivas som $2x-y-z=d$ för någon konstant d och vi kan sätta in någon av de två givna punkterna för att bestämma d. Vi får då $d = 2\cdot 3 - 5 - 5 = -4$. □

Svar: En ekvation för planet är $2x-y-z=-4$.

(2) Givet vektorerna $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$. **(2)**

(b) Skriv vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{u}_3$. **(2)**

Lösning. (a) För att se att de tre vektorerna ska utgöra en bas för $\mathbb{R}^3$ räcker det att kontrollera att de är linjärt oberoende. Detta kan vi göra genom att ställa dem som kolonnerna i en matris och se att vi får en ledande etta i varje kolonn efter Gausselimination.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 - 3r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vi har fått en ledande etta i varje kolonn var de tre vektorerna linjärt oberoende och de bildar därmed en bas för $\mathbb{R}^3$.

(b) För att skriva den givna vektorn som en linjärkombination av basvektorerna söker vi koefficienterna x_1, x_2 och x_3 så att $\vec{v} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$. Vi behöver därmed lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Vi använder samma radoperationer som ovan för att reducera till trappstegsform:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + 2r_2 \\ -r_2 \\ r_3 - 3r_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 - r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Lösningen ges därmed av $x_1 = 4$, $x_2 = -3$ och $x_3 = 3$. Vi kan därmed skriva

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Svar:

(b) $\vec{v} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$.

(3) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Beräkna determinanten för A. **(2)**

(b) Beräkna $\det((A^T A)^{-5})$. **(2)**

Lösning. (a) Vi kan beräkna determinanten genom Laplaceutveckling efter första raden och får då

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot \big(4 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)\big) - 2 \cdot \big(3 \cdot (-1) - 1 \cdot 0\big) \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) = 3. \end{aligned}$$

(b) Enligt räknereglerna för determinanter är $\det((A^T A)^{-5}) = [(\det A^T)(\det A)]^{-5} = [(\det A)(\det A)]^{-1} = (3 \cdot 3)^{-5} = 3^{-10}$.

□

Svar:

(a) $\det(A) = 3$

(b) $\det((A^T A)^{-5}) = 3^{-10}$.

DEL B

(4) Bestäm matrisen för en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vars bildrum, $\mathrm{im}(T)$, ges av planet med ekvation $x + 3y - 7z = 0$. **(4)**

Lösning. Det finns många olika linjära avbildningar som har samma bildrum. Ett sätt välja en är att välja två tre vektorer i planet som kolonnvektorer i matrisen och se till att inte alla tre är parallella. På så vis kommer bildrummet att ligga i planet och inte vara endimensionellt. Vi kan exempelvis välja vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Det är klart att de första två inte är parallella och därmed spänner de tre vektorerna tillsammans upp planet. Matrisen för en avbildning som har planet som bildrum är därmed

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Svar: $A = \left[\begin{smallmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ är matrisen för en linjär avbildning som har planet $x + 3y - 7z = 0$ som bildrum.

(5) Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) Kontrollera att $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ är en egenvektor till A. **(1)**

(b) Bestäm samtliga egenvärden till A och bestäm en bas för varje egenrum till A. **(3)**

Lösning. (a) Vi multiplicerar A med vektorn $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ och får

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ -6 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Alltså ser vi att $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ är en egenvektor med egenvärde 3.

(b) För att bestämma övriga egenvärden kan vi betrakta den karakteristiska ekvationen $\det(A - xI_3) = 0$. Vi får

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \det \begin{bmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ -3 & -x & 3 \\ -6 & -6 & 9-x \end{bmatrix} = (3-x) \det \begin{bmatrix} -x & 3 \\ -6 & 9-x \end{bmatrix} \\ &= (3-x)(-x(9-x) - 3 \cdot (-6)) = (3-x)(x^2 - 9x + 18). \end{aligned}$$

Vi har redan sett att $x = 3$ är en lösning till den karakteristiska ekvationen och vi får resterande lösningar från andragradsekvationen $x^2 - 9x + 18 = 0$ som med hjälp av kvadratkomplettering kan skrivas

$$\begin{aligned} &(x - \tfrac{9}{2})^2 - \tfrac{81}{4} + 18 = 0 \iff (x - \tfrac{9}{2})^2 - \tfrac{9}{4} = 0 \\ &\iff (x - \tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{2})(x - \tfrac{9}{2} - \tfrac{3}{2}) = 0 \iff (x-3)(x-6) = 0. \end{aligned}$$

Det finns alltså bara två egenvärden, $\lambda = 3$ och $\lambda = 6$. Vi bestämmer alla egenvektorer med egenvärde $\lambda = 3$ genom att lösa ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} r_2 \\ r_3 - 2r_2 \\ r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi inför parametrar för de två fria variablerna och kan skriva samtliga lösningar som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där s och t är reella parametrar. En bas för egenrummet med egenvärde 3 ges därmed av vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observera att den egenvektor som gavs i del (a) kan skrivas som $2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_3$.

För egenvärdet $\lambda = 6$ löser vi ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{6}r_2 \\ r_3 - 3_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Vi inför en parameter för den fria variabeln och får alla lösningar som

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

där t är en reell parameter. En bas för egenrummet ges av exempelvis vektorn

$$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot -1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ -3 \cdot -1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ -6 \cdot -1 - 6 \cdot 1 + 9 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ -6 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 9 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ -3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ -6 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 9 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(b) Egenvärdena till A är 3 och 6 och baser för motsvarande egenrum ges av $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ respektive $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

(6) Låt W vara delrummet i $\mathbb{R}^4$ som har en bas B som består av vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Vilken av vektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ligger i W? **(2)**

(b) Bestäm koordinatvektorn med avseende på basen B för den av vektorerna som ligger i W. **(2)**

Lösning. (a) För att avgöra vilken vektor som ligger i delrummet ska vi se vilket ekvationssystem som har lösning av $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{v}_2$ och $x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 = \vec{v}_3$. Alla dessa har samma koefficientmatris och vi kan lösa problemet genom att Gausseliminera en totalmatris med tre högerled.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -4 & -5 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 - r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

Eftersom det är ledande ettor i de två första raderna i koefficientmatrisen är systemet lösbart precis om de två nedersta raderna i högerledet är noll. Detta gäller bara för det andra systemet och det är därmed $\vec{v}_2$ som ligger i W.

(b) För att bestämma koordinaterna kan vi eliminera vidare för det system som har $\vec{v}_2$ som högerled och får då

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - r_2 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

och vi kan läsa av lösningen som $x = 3$ och $y = -4$. Koordinatvektorn för $\vec{v}_2$ i basen $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ges därmed av

$$[\vec{v}_2]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Svar:

(a) Det är $\vec{v}_2$ som ligger i W.

(b) Koordinatvektorn för $\vec{v}_2$ med avseende på basen B är $\left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right]$.

Del C

(7) Det finns många linjära avbildningar $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som bevarar area och avbildar vektorn $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ på vektorn $\left[\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right]$. Bestäm alla sådana linjära avbildningar. **(4)**

Lösning. Att avbildningen bevarar area betyder att beloppet av determinanten för dess matris är 1. Triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$ ska avbildas på en triangel med area $1/2$. Om $(1,0)$ avbildas på (a,b) betyder det att arean av triangeln med hörn $(0,0)$, (a,b) och $(4,3)$ ska vara $1/2$. Arean av denna triangel ges av

$$\frac{1}{2}|3a-4b|$$

och därmed ska vi ha att $3a-4b=1$ eller $3a-4b=-1$. Lösningarna till detta kan skrivas

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

där t är en reell parameter.

För att få matrisen för T nu se vad standardbasen avbildas på. Vi har att

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \pm\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

och

$$T(\vec{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} - \pm\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - t\cdot\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}.$$

Sammantaget ser vi att matrisen för T kan skrivas som

$$\begin{bmatrix}1+4t & 3-4t\\ 1+3t & 2-3t\end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{bmatrix}-1+4t & 5-4t\\ -1+3t & 4-3t\end{bmatrix}.$$

□

Svar: Alla sådan avbildningar ges av matriserna $\left[\begin{smallmatrix}1+4t & 3-4t\\ 1+3t & 2-3t\end{smallmatrix}\right]$ och $\left[\begin{smallmatrix}-1+4t & 5-4t\\ -1+3t & 4-3t\end{smallmatrix}\right]$ där t är en reell parameter.

(8) Låt $\vec{u}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ med ett rätvinkligt koordinatsystem. Vinkeln mellan $\vec{u}$ och x-axeln är $60°$ och vinkeln mellan $\vec{u}$ och y-axeln är $45°$. Bestäm vinkeln mellen $\vec{u}$ och z-axeln. **(4)**

Lösning. Vi kan utgå från att vektorns längd är ett eftersom vinklarna inte ändras av skalning. Vi har därmed att x-koordinaten för $\vec{u}$ är $\pm\cos 60° = \pm\frac{1}{2}$ och y-koordinaten är $\pm\cos 45° = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom vektorns längd är ett ges nu z-koordinaten av

$$= 1 - (\pm\frac{1}{2})^2 - (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}. = \frac{1}{4}.$$

Om vinkeln till z-axeln är θ har vi därmed att $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$ och vi kan dra slutsatsen att vinkeln mot z-axeln också är $60°$ eller $120°$. $\square$

Svar: Vinkeln mot z-axeln är $60°$ eller $120°$.

(9) Visa att om det finns någon bas i $\mathbb{R}^n$ vars vektorer är egenvektorer till de båda $n \times n$-matriserna A och B så *kommuterar* dessa, dvs $AB = BA$.

Lösning. När vi byter bas till den bas som består av egenvektorerna för matriserna kommer båda matriserna att diagonaliseras. Vi kan alltså genom att välja de den gemensamma egenbasen som kolonner i en matris S få

$$S^{-1}AS = D_1 \quad \text{och} \quad S^{-1}BS = D_2$$

där D_1 och D_2 är diagonalmatriser. Eftersom diagonalmatriser kommuterar har vi att $D_1D_2 = D_2D_1$ och vi får därför att

$$AB = SD_1S^{-1}SD_2S^{-1} = SD_1D_2S^{-1} = SD_2D_1S^{-1} = SD_2S^{-1}SD_1S^{-1} = BA.$$

$\square$