



KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri**  
**Tentamen**  
**Onsdagen den 16 mars, 2011**

Skrivtid: 14.00-19.00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen från period 2, 2010 och period 3, 2011. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminariereserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminariereserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL A

- (1) (a) Använd Gauss-Jordanelimination för att beräkna inversen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3)

- (b) Använd resultatet från (a) för att lösa matrisekvationen
- $XA = B$
- , där

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1)

- (2) Låt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representera en linjär avbildning  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  med avseende på standardbasen.

- (a) Beräkna
- $T(1, 2, -2)$
- .

(1)

- (b) Bestäm kärnan
- <sup>1</sup>
- till
- $T$
- , dvs nollrummet till matrisen
- $A$
- .

(2)

- (c) Visa att
- $T(1, 0, 0)$
- ,
- $T(0, 1, 0)$
- och
- $T(0, 0, 1)$
- är linjärt beroende.

(1)

- (3) Låt
- $T$
- vara den linjära avbildning från
- $\mathbb{R}^2$
- till
- $\mathbb{R}^2$
- som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm standardmatrisen för sammansättningen
- $T \circ T$
- .

(1)

- (b) Bestäm en bas för
- $\mathbb{R}^2$
- som består av egenvektorer till
- $A$
- .

(3)

<sup>1</sup>eng. *kernel*

## DEL B

- (4) Om vi har en triangel med sidlängderna  $a$ ,  $b$  och  $c$  kan vi beräkna arean som  $\frac{1}{4}\sqrt{-\det(A)}$  där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Använd denna formel för att beräkna arean av en triangel med sidlängderna  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  och  $2\sqrt{2}$ . **(4)**

- (5) Studera  $\mathbb{R}^4$  med den vanliga euklidiska inre produkten  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . Låt  $W$  vara det delrum till  $\mathbb{R}^4$  som ges av lösningsmängden till ekvationen

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0.$$

- (a) Bestäm en bas för  $W$ . **(1)**  
(b) Använd Gram-Schmidts metod för att utgående från basen i (a) hitta en ortonormal bas för  $W$ . **(3)**
- (6) (a) Redogör för hur vi kan bestämma den punkt  $Q$  i ett givet plan med ekvation på formen  $ax + by + cz = d$  som ligger närmast en given punkt  $P$  i rummet. Illustrera metoden genom att för var och en av de tre punkterna  $P_1 = (1, 1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 1, 1)$  och  $P_3 = (2, -1, -1)$  bestämma motsvarande närmsta punkt i planet med ekvationen  $x - 2y + 2z = 1$ . **(3)**  
(b) Använd räkningarna ovan för att avgöra vilka (om någon) av punkterna  $P_1$ ,  $P_2$  och  $P_3$  som ligger på samma sida av planet som origo. **(1)**

*Var god vänd!*

## DEL C

- (7) Låt  $A$  vara en symmetrisk  $3 \times 3$ -matris som har ett egenvärde som är lika med 2. Anta att alla vektorer som uppfyller  $x - 2y + z = 0$  är egenvektorer till  $A$  med egenvärdet 1.
- (a) Bestäm en egenvektor med egenvärde 2. **(1)**
- (b) Bestäm matrisen  $A$ . (*Ledning:* Börja med att bestämma en ortogonal bas för  $\mathbb{R}^3$  som består av egenvektorer till  $A$ .) **(3)**

- (8) På campus finns det två studentpubar  $A$  och  $B$ . Varje fredag fördelar sig studenterna efter följande mönster, som enbart beror på pubvalet förra helg. Av de studenter som var på pub  $A$  kommer 60% välja pub  $A$  igen, medan de resterande 40% väljer pub  $B$ . Av dem som var på pub  $B$  förra helgen kommer enbart 20% välja pub  $B$ , medan 80% väljer pub  $A$ . Vid terminstart väljer 50% av studenterna pub  $A$  och 50% av studenterna väljer pub  $B$ .
- (a) Låt  $a_n$  vara andelen studenter som väljer pub  $A$  fredag  $n$  och  $b_n$  vara andelen studenter som väljer pub  $B$  fredag  $n$ . Visa att vi då har sambandet

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,80 \\ 0,40 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

för  $n \geq 0$  om vi numrerar fredagarna  $0, 1, 2, \dots$  **(1)**

- (b) Vad blir fördelningen av studenterna på de olika pubarna vid slutet av studietiden (d.v.s. efter en mycket lång tid)? **(3)**

- (9) För alla vektorer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  i  $\mathbb{R}^3$  gäller att

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0.$$

Bevisa detta genom att

- (a) Visa att vänsterledet,  $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , är linjärt i  $\mathbf{u}$  när  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  fixerade. **(1)**
- (b) Visa att vänsterledet är noll om  $\mathbf{u}$  är en linjärkombination av  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ . **(1)**
- (c) Visa att vänsterledet är noll om  $\mathbf{u}$  är ortogonal mot både  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ . **(1)**
- (d) Förklara varför man från (a)-(c) kan dra slutsatsen att påståendet gäller för alla vektorer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  i  $\mathbb{R}^3$ . **(1)**



KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri**  
**Lösningförslag till tentamen 2011-03-16**

---

DEL A

(1) (a) Använd Gauss-Jordanelimination för att beräkna inversen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3)

(b) Använd resultatet från (a) för att lösa matrisekvationen  $XA = B$ , där

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1)

*Lösning.* (a) Vi kan beräkna inversen  $A^{-1}$  genom Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen  $[A \mid I]$  vilket ger

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -r_2 & & & & & \\ r_1 & & & & & \\ r_3 + r_2 & & & & & \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} r_1 + 3r_2 & & & & & \\ r_2 & & & & & \\ r_3 - 2r_2 & & & & & \end{array} \right] \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} r_1 + 2r_3 & & & & & \\ r_2 + r_3 & & & & & \\ -r_3 & & & & & \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Alltså har vi fått att

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) För att lösa matrisekvationen  $XA = B$  multiplicerar vi bägge sidor med  $A^{-1}$  från höger och får  $X = BA^{-1}$ . Med hjälp av resultatet från (a) kan vi nu beräkna

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0-1+4 & 0+1-2 & 0+1-2 \\ -5+3+2 & 5-3-1 & 10-3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$\begin{aligned} XA &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+1-1 & 3-3+1 & 3-1+0 \\ 0-1+6 & 0+3-6 & 0+1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} = B. \end{aligned}$$

□

**Svar:**

(a)  $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$

(b) Lösningen är  $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$

(2) Låt matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

representera en linjär avbildning  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  med avseende på standardbasen.

- (a) Beräkna  $T(1, 2, -2)$ . (1)  
 (b) Bestäm kärnan<sup>1</sup> till  $T$ , dvs nollrummet till matrisen  $A$ . (2)  
 (c) Visa att  $T(1, 0, 0)$ ,  $T(0, 1, 0)$  och  $T(0, 0, 1)$  är linjärt beroende. (1)

*Lösning.* a). För att bestämma  $T(1, 2, -2)$  måste vi utföra matrismultiplikationen  $A \cdot [1 \ 2 \ -2]^T$ , där  $A$  är  $(4 \times 3)$ -matrisen ovan. Vi erhåller

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs

$$T(1, 2, -2) = (-1, -3, -1, 1).$$

Vi utför Gauss-Jordanelmination på matrisen  $A$  för att få fram nollrummet. Vi använder första raden för att eliminera i första kolumnen och får

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1 \\ r_4 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{2}{3}r_2 \\ \frac{1}{3}r_2 \\ r_3 - r_2 \\ r_4 + 2r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har därmed en fri variabel i den tredje kolumnen och inför en parameter så att  $x_3 = 3t$ . Vi kan sedan använda de två nollskilda raderna för att läsa av  $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 = -t$  och  $x_2 = -\frac{4}{3}x_3 = -4t$ . Därmed består nollrummet av alla punkter  $(x_1, x_2, x_3)$  i  $\mathbf{R}^3$  på formen  $(-t, -4t, 3t)$  där  $t$  är en reell parameter.

Vi kan använda satsen från boken som säger att dimensionen av bildrummet till en avbildning  $T$  plus dimensionen av kärnan till  $T$  är lika med antalet kolonner i matrisen  $A$ . Bildrummet ges spänns upp av vektorerna  $T(1, 0, 0)$ ,  $T(0, 1, 0)$  och  $T(0, 0, 1)$ . Om dessa vore linjärt *oberoende* skulle bildrummet ha dimension tre, vilket medför att dimensionen till kärnan är noll, men vi såg i del (b) att kärnan har dimension ett eftersom det krävdes en parameter.

Ett annat sätt är att se att

$$aT(1, 0, 0) + bT(0, 1, 0) + cT(0, 0, 1) = T(a, b, c)$$

och därmed är de tre vektorerna linjärt beroende precis om det finns  $a$ ,  $b$  och  $c$  som inte alla är noll och  $T(a, b, c) = 0$ . Detta var vad vi såg att det fanns i uppgift (b), tex är

<sup>1</sup>eng. *kernel*

$T(-1, -4, 3) = 0$  och därmed har vi det linjära beroendet

$$-T(1, 0, 0) - 4T(0, 1, 0) + 3T(0, 0, 1) = 0.$$

□

**Svar:**

(a)  $T(1, 2, -2) = (-1, -3, -1, 1)$ .

(b) Kärnan ges av alla vektorer på formen  $(x_1, x_2, x_3) = (-t, -4t, t)$ , där  $t$  är en reell parameter.



(3) Låt  $T$  vara den linjära avbildning från  $\mathbb{R}^2$  till  $\mathbb{R}^2$  som ges av standardmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm standardmatrisen för sammansättningen  $T \circ T$ . (1)

(b) Bestäm en bas för  $\mathbb{R}^2$  som består av egenvektorer till  $A$ . (3)

*Lösning.* (a) Standardmatrisen för sammansättningen är lika med matrisprodukten av standardmatriserna. Vi får alltså att standardmatrisen för  $T \circ T$  ges av

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 & 0 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Eftersom matrisen  $A$  är övertriangulär kan vi läsa av egenvärdena som diagonalelementen,  $\lambda = 1$  och  $\lambda = -1$ . Vi hittar sedan egenvektorer till motsvarande egenvärden genom att lösa ekvationssystemet med totalmatris  $[A - \lambda I \mid 0]$ . För  $\lambda = 1$  får vi

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{4}r_1 \\ r_2 + \frac{1}{2}r_1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

och vi kan läsa av lösningarna som  $(t, 0)$  för en reell parameter  $t$ .

För  $\lambda = -1$  får vi

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2}r_1 \\ r_2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

och vi kan läsa av lösningarna som  $(-2t, t)$  för en reell parameter  $t$ .

En bas av egenvektorer ges nu av en egenvektor för varje egenvärde eftersom vi bara behöver två basvektorer i  $\mathbb{R}^2$ . Alltså kan vi välja  $(1, 0)$  med egenvärde 1 och  $(-2, 1)$  med egenvärde  $-1$ .

□

**Svar:**

(a) Standardmatrisen för  $T \circ T$  är identitetmatrisen.

(b)  $(1, 0)$  och  $(-2, 1)$  utgör tillsammans en bas för  $\mathbb{R}^2$  av egenvektorer till  $A$ .

## DEL B

- (4) Om vi har en triangel med sidlängderna  $a$ ,  $b$  och  $c$  kan vi beräkna arean som  $\frac{1}{4}\sqrt{-\det(A)}$  där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Använd denna formel för att beräkna arean av en triangel med sidlängderna  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  och  $2\sqrt{2}$ . (4)

*Lösning.* När vi sätter in värdena  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{3}$  och  $c = 2\sqrt{2}$  i matrisen  $A$  får vi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

och vi kan beräkna  $\det(A)$  med hjälp av radoperationer som

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} & r_2 & & \\ r_1 & & & \\ r_3 - r_1 - 2r_2 & & & \\ r_4 - r_2 - 3r_3 & & & \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} r_1 & & & \\ r_2 & & & \\ r_3 & & & \\ r_4 + \frac{3}{4}r_2 & & & \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{vmatrix} = -(4) \cdot \left(-\frac{15}{4}\right) = -15. \end{aligned}$$

Alltså ges arean av triangeln enligt formeln av  $\frac{1}{4}\sqrt{15}$ . □

**Svar:** Arean av triangeln är enligt formeln  $\frac{1}{4}\sqrt{15}$  areaenheter.

- (5) Studera  $\mathbb{R}^4$  med den vanliga euklidiska inre produkten  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ . Låt  $W$  vara det delrum till  $\mathbb{R}^4$  som ges av lösningsmängden till ekvationen

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0.$$

- (a) Bestäm en bas för  $W$ . (1)  
 (b) Använd Gram-Schmidts metod för att utgående från basen i (a) hitta en ortonormal bas för  $W$ . (3)

*Lösning.* (a) Vi bestämmer först en bas för  $W$ . Skriv lösningsmängden till ekvationen  $x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$  på parameterform genom att sätta  $x_2 = r$ ,  $x_3 = s$  och  $x_4 = t$ . Vi får att

$$\begin{cases} x_1 = r - 2s + 3t \\ x_2 = r \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases}$$

Detta kan skrivas

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = r(1, 1, 0, 0) + s(-2, 0, 1, 0) + t(3, 0, 0, 1).$$

En bas för  $W$  utgörs alltså av vektorerna  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-2, 0, 1, 0)$  och  $\mathbf{u}_3 = (3, 0, 0, 1)$ .

- (b) Vi använder nu Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocedur för att få en ortogonal bas.  
 Steg 1:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0).$$

Steg 2:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = (-2, 0, 1, 0) - \frac{-2}{2}(1, 1, 0, 0) = (-1, 1, 1, 0).$$

Steg 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 \\ &= (3, 0, 0, 1) - \frac{3}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{-3}{3}(-1, 1, 1, 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{2}(1, -1, 2, 2). \end{aligned}$$

Vi erhåller en ortonormal bas genom att normera de erhållna vektorerna  $(1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, -1, 1, 0)$  och  $\frac{1}{2}(1, -1, 2, 2)$ ; basen blir

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2) \right\}.$$

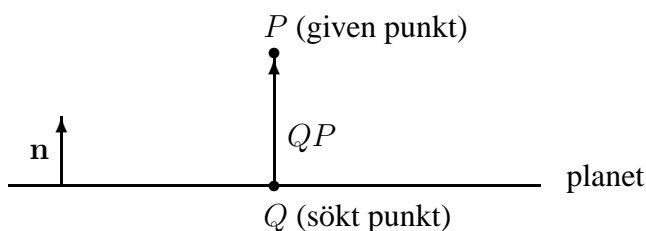
□

**Svar:**

- (a) En bas för  $W$  ges av vektorena  $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{u}_2 = (-2, 0, 1, 0)$  och  $\mathbf{u}_3 = (3, 0, 0, 1)$ .
- (b) En ortonormal bas för  $W$  ges av vektorena  $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0)$  och  $\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, -1, 2, 2)$ .

- (6) (a) Redogör för hur vi kan bestämma den punkt  $Q$  i ett givet plan med ekvation på formen  $ax + by + cz = d$  som ligger närmast en given punkt  $P$  i rummet. Illustrera metoden genom att för var och en av de tre punkterna  $P_1 = (1, 1, 0)$ ,  $P_2 = (1, 1, 1)$  och  $P_3 = (2, -1, -1)$  bestämma motsvarande närmsta punkt i planet med ekvationen  $x - 2y + 2z = 1$ . (3)
- (b) Använd räkningarna ovan för att avgöra vilka (om någon) av punkterna  $P_1$ ,  $P_2$  och  $P_3$  som ligger på samma sida av planet som origo. (1)

*Lösning.* (a) Den sökta punkten  $Q$  i planet karakteriseras av att vektorn  $QP$  är vinkelrät mot planet och därmed parallell med planets normalvektor  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ .

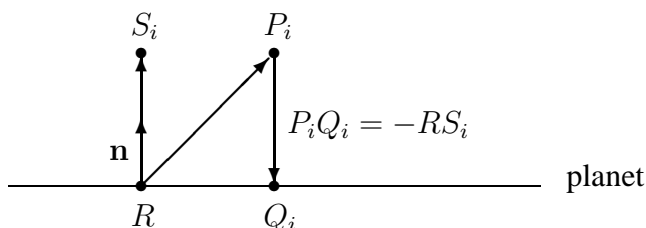


Det finns två naturliga, och besläktade, metoder att bestämma  $Q$ , och vi beskriver bägge.

(Som bekant ska man dock som tentand bara ge *en* lösning!)

Eftersom metoderna ska användas för flera olika givna punkter  $P_i$  ändrar vi beteckningarna något och antar att man ska bestämma den punkt  $Q_i$  i planet som ligger närmast den givna punkten  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ .

**Metod 1, "projektion på normalvektorn  $\mathbf{n}$ ":**



I denna metod bestäms först en punkt  $R$  i det givna planet, exempelvis genom att lösa ekvationen  $ax + by + cz = d$  med Gauss-elimination och sätta de fria variablerna till 0. Det ger till resultat en punkt  $R = (x_0, y_0, z_0)$ , där alltså  $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ . Nästa steg är att projicera vektorn

$$RP_i = (x_i - x_0, y_i - y_0, z_i - z_0)$$

på planets normalvektor  $\mathbf{n}$ , vilket ger till resultat en vektor

$$RS_i = \frac{RP_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = s_i \cdot (a, b, c),$$

där

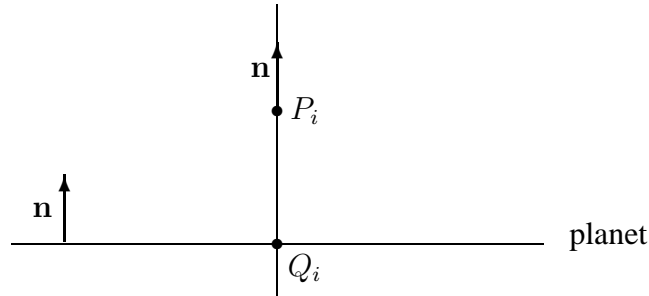
$$s_i = \frac{RP_i \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} = \frac{a(x_i - x_0) + b(y_i - y_0) + c(z_i - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Slutligen erhålls den sökta punkten  $Q_i$  ur sambandet (se figuren)

$$Q_i = P_i + P_i Q_i = P_i - RS_i = (x_i, y_i, z_i) - s_i \cdot (a, b, c),$$

med  $s_i$  enligt ovan.

**Metod 2, "projektion direkt på planet mha normalvektorn  $\mathbf{n}$ ":**



I denna metod bildar man först en linje som går genom den givna punkten  $P_i = (x_i, y_i, z_i)$  och som har riktningsvektorn  $\mathbf{n} = (a, b, c)$ , så att linjen är vinkelrät mot det givna planet. Ekvationen för denna linje på parameterform är

$$(x, y, z) = (x_i, y_i, z_i) + t \cdot (a, b, c).$$

Vår sökta punkt  $Q_i$  utgör skärningspunkten mellan linjen och det givna planet, och den erhålls genom att bestämma det värde  $t_i$  på parametern  $t$  för vilket  $ax + by + cz = d$ , dvs  $(a, b, c) \cdot ((x_i, y_i, z_i) + t \cdot (a, b, c)) = d$ , vilket ger att

$$t_i = \frac{d - (a, b, c) \cdot (x_i, y_i, z_i)}{(a, b, c) \cdot (a, b, c)} = \frac{d_i - ax_i - by_i - cz_i}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Därmed är vår sökta punkt  $Q_i = (x_i, y_i, z_i) + t_i \cdot (a, b, c)$ , med  $t_i$  enligt ovan.

Notera att metoderna ger samma resultat, ty  $t_i = -s_i$  (eftersom  $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ ).

**Insättning av siffror:** Vi har i uppgiften att  $(a, b, c) = (1, -2, 2)$ ,  $d = 1$ ,

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1, z_1) = (1, 1, 0), \\ P_2 &= (x_2, y_2, z_2) = (1, 1, 1), \\ P_3 &= (x_3, y_3, z_3) = (2, -1, -1) \end{aligned}$$

och, om man använder metod 1,  $R = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ .

Insättning i exempelvis metod 2 ger att  $t_i = (1 - x_i + 2y_i - 2z_i)/9$ , och därmed är  $t_1 = 2/9$ ,  $t_2 = 0$  och  $t_3 = -1/9$ , så att

$$\begin{aligned} Q_1 &= (1, 1, 0) + (2/9) \cdot (1, -2, 2) = (11/9, 5/9, 4/9), \\ Q_2 &= (1, 1, 1) + 0 \cdot (1, -2, 2) = (1, 1, 1) = P_2, \\ Q_3 &= (2, -1, -1) - (1/9) \cdot (1, -2, 2) = (17/9, -7/9, -11/9). \end{aligned}$$

- (b) Om  $s_i > 0$  (dvs  $t_i < 0$ ) så ligger  $P_i$  på den sida av planet som normalvektorn  $\mathbf{n}$  pekar åt, om  $s_i < 0$  (dvs  $t_i > 0$ ) så ligger  $P_i$  på den motsatta sidan, och om  $s_i = 0$  (dvs  $t_i = 0$ ) så ligger  $P_i$  i planet.

Eftersom i vårt fall  $t_1 > 0$ ,  $t_2 = 0$  och  $t_3 < 0$  så ligger punkterna  $P_1$  och  $P_3$  på varsin sida av planet medan  $P_2$  ligger i planet (så att  $Q_2 = P_2$ ).

Om man sätter  $P_4 = (0, 0, 0)$  i formeln ovan så erhålls att  $t_4 = 1/9 > 0$ , och därmed är det endast  $P_1$  av de tre givna punkterna som ligger på samma sida om planet som origo.

□

**Svar:**

- (a) De närmaste punkterna är  $Q_1 = (11/9, 5/9, 4/9)$ ,  $Q_2 = P_2 = (1, 1, 1)$  respektive  $Q_3 = (17/9, -7/9, -11/9)$ .
- (b)  $P_1$  ligger på samma sida om planet som origo, men inte  $P_2$  och  $P_3$ .

## DEL C

- (7) Låt  $A$  vara en symmetrisk  $3 \times 3$ -matris som har ett egenvärde som är lika med 2. Anta att alla vektorer som uppfyller  $x - 2y + z = 0$  är egenvektorer till  $A$  med egenvärdet 1.
- (a) Bestäm en egenvektor med egenvärde 2. **(1)**
- (b) Bestäm matrisen  $A$ . (*Ledning:* Börja med att bestämma en ortogonal bas för  $\mathbb{R}^3$  som består av egenvektorer till  $A$ .) **(3)**

*Lösning.* (a) Eftersom egenvektorer som hör till olika egenvärden till symmetriska matriser är ortogonala mot varandra måste egenvektorerna med egenvärde 2 vara normalvektorer till planet av egenvektorer med egenvärde 1. Vi kan läsa av en normalvektor som koefficienterna i ekvationen för planet och får därmed egenvektorerna med egenvärde 2 som  $t(1, -2, 1)$ , där  $t \neq 0$ .

- (b) Vi kan nu finna en ortogonal bas av egenvektorer genom att välja två ortogonala vektorer i planet  $x - 2y + z = 0$ . Den ena kan väljas som  $(1, 1, 1)$  och vi kan få den andra genom kryssprodukten med  $(1, -2, 1)$ , dvs  $(1, 1, 1) \times (1, -2, 1) = (1 - (-2), -1 - (-1), -2 - 1) = (3, 0, -3)$ .

Vi kan nu med ett ortogonalt basbyte med matrisen

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

diagonalisera  $A$  till

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså kan vi beräkna  $A$  genom

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En alternativ metod är att se att  $A - I$  har ett tvådimensionellt egenrum med egenvärde 0, dvs ett tvådimensionellt nollrum, och ett endimensionellt egenrum med egenvärde



ett som ges av linjen med riktningsvektor  $(1, -2, 1)$ . Dessutom är dessa båda egenrum ortogonala mot varandra. Alltså har vi  $A - I$  är standardmatrisen för den ortogonala projektionen på vektorn  $\mathbf{u} = (1, -2, 1)$ . Om vi tänker på  $\mathbf{u}$  som en kolonnmatris kan därför  $A - I$  skrivas som

$$\frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \frac{1}{1^2 + (-2)^2 + 1} [1 \quad -2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi får nu  $A$  som  $I + (A - I)$ , dvs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

□

**Svar:**

- (a)  $(1, -2, 1)$  är en egenvektor med egenvärde 2.  
(b) Matrisen ges av

$$A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

- (8) På campus finns det två studentpubar  $A$  och  $B$ . Varje fredag fördelar sig studenterna efter följande mönster, som enbart beror på pubvalet förra helg. Av de studenter som var på pub  $A$  kommer 60% välja pub  $A$  igen, medan de resterande 40% väljer pub  $B$ . Av dem som var på pub  $B$  förra helgen kommer enbart 20% välja pub  $B$ , medan 80% väljer pub  $A$ . Vid terminstart väljer 50% av studenterna pub  $A$  och 50% av studenterna väljer pub  $B$ .
- (a) Låt  $a_n$  vara andelen studenter som väljer pub  $A$  fredag  $n$  och  $b_n$  vara andelen studenter som väljer pub  $B$  fredag  $n$ . Visa att vi då har sambandet

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,80 \\ 0,40 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

för  $n \geq 0$  om vi numrerar fredagarna  $0, 1, 2, \dots$  (1)

- (b) Vad blir fördelningen av studenterna på de olika pubarna vid slutet av studietiden (d.v.s. efter en mycket lång tid)? (3)

*Lösning.* (a) Enligt texten har vi att  $a_{n+1} = 0,60a_n + 0,80b_n$  och  $b_{n+1} = 0,40a_n + 0,20b_n$ , vilket kan formuleras som matrisprodukten

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,60 & 0,80 \\ 0,40 & 0,20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

- (b) För varje  $n \geq 0$  har vi att fördelning  $F_{n+1} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$  ges av  $F_{n+1} = AF_n$ , där matrisen

$$A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Speciellt har vi att

$$F_{n+1} = AF_n = A(AF_{n-1}) = \dots = A^{n+1}F_0.$$

Vi känner  $F_0 = \begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix}$ , och vill beräkna  $A^n F_0$ , för stora  $n$ . Detta gör vi lättast med egenvektorer. Det karakteristiska polynomet till matrisen  $A$  är

$$\left(\lambda - \frac{6}{10}\right)\left(\lambda - \frac{2}{10}\right) - \frac{32}{100} = \lambda^2 - \frac{8}{10}\lambda - \frac{20}{100}.$$

Nollställen hittar vi genom kvadratkomplettering. Det vill säga vi sätter uttrycket ovan lika med noll, och erhåller att

$$\left(\lambda - \frac{4}{10}\right)^2 = \frac{20}{100} + \frac{16}{100} = \frac{36}{100}.$$

Detta betyder att egenvärdena till matrisen  $A$  är

$$\lambda_1 = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} = 1 \quad \text{och} \quad \lambda_2 = \frac{-6}{10} + \frac{4}{10} = -\frac{2}{10}.$$

De tillhörande egenrummen bestämmer vi på sedvanligt sätt, och får att  $E_1$  är nollrummet till

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{10} & \frac{-8}{10} \\ \frac{-4}{10} & \frac{8}{10} \end{bmatrix}.$$

Med andra ord är  $E_1 = (2t, t)$ , godtyckliga tal  $t$ . Egenrummet  $E_2$  blir nollrummet till  $\begin{bmatrix} \frac{-8}{10} & \frac{-8}{10} \\ \frac{-4}{10} & \frac{-4}{10} \end{bmatrix}$ , vilket betyder att  $E_2 = (t, -t)$ . En bas för egenrummet väljer vi som  $\beta = \{(2, 1), (1, -1)\}$ . Vi har att  $A = P^{-1}DP$ , där  $P$  är basbytesmatrisen från standardmatrisen till basen  $\beta$ , och där

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Matrisen  $P^{-1}$  är basbytesmatrisen från basen  $\beta$  till standardbasen, och denna läser vi av som

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En välkänd formel ger att

$$P = (P^{-1})^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

För varje  $n \geq 0$  har vi att  $A^n = P^{-1}D^nP$ . Vi beräknar

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & (-\frac{1}{5})^n \\ 1 & -(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (-\frac{1}{5})^n & 2 - 2(-\frac{1}{5})^n \\ 1 - (-\frac{1}{5})^n & 1 + 2(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har att  $F_0 = \begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix}$ . Detta betyder att för varje  $n > 0$  har vi att

$$F_n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (-\frac{1}{5})^n & 2 - 2(-\frac{1}{5})^n \\ 1 - (-\frac{1}{5})^n & 1 + 2(-\frac{1}{5})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,50 \\ 0,50 \end{bmatrix}.$$

Speciellt har vi att om  $n \gg 0$  blir stor, eventuellt går mot oändligheten, så kommer  $(\frac{1}{5})^n$  gå mot 0. Detta ger att

$$F_\infty = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \cdot 0,50 + 0 + 2 \cdot 0,50 - 0 \\ 0,50 - 0 + 0,50 + 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dvs fördelningen av studenter blir  $2/3 \approx 67\%$  på pub  $A$  och  $1/3 \approx 33\%$  på pub  $B$ .  $\square$

**Svar:**

- (b) Fördelningen i slutet av studieten är  $2/3$  av studenterna på pub  $A$  och  $1/3$  av studenterna på pub  $B$ .

(9) För alla vektorer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  i  $\mathbb{R}^3$  gäller att

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Bevisa detta genom att

- (a) Visa att vänsterledet,  $T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ , är linjärt i  $\mathbf{u}$  när  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  fixerade. **(1)**  
 (b) Visa att vänsterledet är noll om  $\mathbf{u}$  är en linjärkombination av  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ . **(1)**  
 (c) Visa att vänsterledet är noll om  $\mathbf{u}$  är ortogonal mot både  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ . **(1)**  
 (d) Förklara varför man från (a)-(c) kan dra slutsatsen att påståendet gäller för alla vektorer  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  i  $\mathbb{R}^3$ . **(1)**

*Lösning.* (a) Genom att använda distributiva lagen för kryssprodukten får vi

$$\begin{aligned} & T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)) + \mathbf{w} \times ((\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \times \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_1) \\ &+ \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_2) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) = \\ &= \mathbf{u}_1 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_1) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{v}) \\ &+ \mathbf{u}_2 \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}_2) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{v}) \\ &= T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

och vidare har vi

$$\begin{aligned} & T(a\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ &= (a\mathbf{u}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times (a\mathbf{u})) + \mathbf{w} \times ((a\mathbf{u}) \times \mathbf{v}) \\ &= a\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times a(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times a(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= a\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + a\mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + a\mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ &= aT(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

(b) På grund av linjäriteten räcker det att visa påståendet för  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  och  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ . Vi får

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) - \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

och på samma sätt

$$\begin{aligned} T(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{0}) - \mathbf{w} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(c) På grund av linjäriteten från del (a) räcker det att visa påståendet för en enhetsvektor som är ortogonal mot både  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ . Om vi ser på vektorer i planet som är ortogonalt mot  $\mathbf{u}$  innebär nu kryssprodukten med  $\mathbf{u}$  från vänster en rotation med  $\pi/2$  åt ena hållet, och kryssprodukt med  $\mathbf{u}$  från höger en rotation med  $\pi/2$  åt andra hållet. (Om det är medurs eller moturs beror på från vilket håll vi ser på planet.)

Den första termen  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  är noll eftersom  $\mathbf{u}$  är parallell med  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ . De båda andra termerna är multipler av  $\mathbf{u}$ . För att se att dessa tar ut varandra ser vi på vinkeln mellan  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$  och vinkeln mellan  $\mathbf{w}$  och  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Dessa är lika eftersom vi i det första fallet roterat  $\mathbf{w}$  med  $\pi/2$  åt ena hållet, och i det andra fallet roterat  $\mathbf{v}$  åt andra hållet lika mycket. Det rör sig därmed om två kryssprodukter av vektorer

med längderna  $|\mathbf{v}|$  och  $|\mathbf{w}|$  och med samma vinkel mellan. Det enda som skiljer är ordningen mellan faktorerna och därmed kommer de att ta ut varandra.

- (d) Vi kan skriva varje vektor  $\mathbf{u}$  som summan av en vektor  $\mathbf{u}_1$  som ligger i spannet av  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  med en vektor  $\mathbf{u}_2$  som är ortogonal mot både  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$ . På grund av linjäriteten från (a) har vi därmed att

$$T(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = T(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + T(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 + 0 = 0,$$

där vi utnyttjar resultaten från (b) och (c) för att se att de båda termerna är noll.

□

---