Namn: . . . .

Personnummer: . . . .

Program, årskurs: . . . .

KTH Computer Science
and Communication

Tentamen, del 1
DN1240 – Numeriska metoder gk II
F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

DEL 1: 20 poäng. Inga hjälpmedel. Betygsgräns för betyg E: 14 poäng (inkl. bonuspoäng).

Bonus. Ange här dina giltiga bonuspoäng från vt-11 eller ht-11, och den kursomgång (linje, termin) där poängen erhållits.

☐ Antal bonuspoäng   Kursomgång:

1a. Ekvationen $x = 1 - 0.2e^{3x}$ ska lösas med Newtons metod. Utför en iteration med startapproximationen $x_0 = 0$.

Resultatet blir: **(2 p)**

- ☐ 0
- ☐ 1/3
- ☐ -1/3
- ☐ 1/2
- ☐ -1/2
- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ något annat värde

(2 p) b. Villkoret för att fixpunktsiteration för samma ekvation som i del a, vars rot $= \alpha$ (och samma startapproximation) med iterationsformeln $x_{n+1} = 1 - 0.2e^{3x_n}$ ska konvergera lyder

- ☐ $|1 - 0.2e^{3\alpha}| < 1$
- ☐ $|1 - 0.2e^{3\alpha}| > 1$
- ☐ $|1 - 0.6e^{3\alpha}| < 1$
- ☐ $|1 - 0.6e^{3\alpha}| > 1$
- ☐ $|0.2e^{3\alpha}| < 1$
- ☐ $|0.2e^{3\alpha}| > 1$
- ☐ $0.2e^{3\alpha}/\alpha = 0$
- ☐ $|0.6e^{3\alpha}| < 1$
- ☐ $|0.6e^{3\alpha}| > 1$
- ☐ något annat villkor

2. En metod för numerisk integration har noggrannhetsordning p. Detta betyder att: **(2 p)**

- ☐ avrundningsfelet minskar med faktorn p för varje delintervall
- ☐ trunkeringsfelet minskar med faktorn p för varje delintervall
- ☐ steglängden $h = p$ har använts
- ☐ trunkeringsfelet är proportionellt mot steglängden upphöjt till p
- ☐ antal delintervall är p
- ☐ antalet delintervall som krävs för att uppnå felet ε är proportionellt mot ε^{-p}

3. För att anpassa en linje till punkterna

$x =$	1	3	4	5	11	13
$y =$	2	2.2	2.5	3	4.4	5.2

används minstakvadratmetoden. Detta leder till ett överbestämt ekvationssystem $Ax \approx b$.

Vilken dimension har matrisen A? **(1p)**

- ☐ 2 rader, 6 kolumner
- ☐ 6 rader, 2 kolumner
- ☐ 2 rader, 2 kolumner
- ☐ 6 rader, 6 kolumner
- ☐ 4 rader, 6 kolumner

Hur många ekvationer har normalekvationerna? **(1p)**

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

4a. Om lösning av ett fullt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär lösning av systemet med tusen obekanta? **(2 p)**

- ☐ 0.2 s.
- ☐ 0.5 s.
- ☐ 1 s.
- ☐ 2 s.
- ☐ 50 s.
- ☐ 100 s.
- ☐ 500 s.
- ☐ 800 s.
- ☐ 1000 s.
- ☐ något annat värde

b. Om lösning av ett tridiagonalt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär en effektiv lösning av systemet med tusen obekanta? **(2 p)**

- ☐ 0.2 s.
- ☐ 0.5 s.
- ☐ 1 s.
- ☐ 2 s.
- ☐ 50 s.
- ☐ 100 s.
- ☐ 500 s.
- ☐ 800 s.
- ☐ 1000 s.
- ☐ något annat värde

5. Differentialekvationen $y' = y^2 + \cos(\pi x)$, $y(1) = 1/2$, löses med Eulers metod och steglängden $h = 0.2$. Då blir y-värdet vid $y(1.2)$: **(2 p)**

- ☐ 0.01
- ☐ 0.02
- ☐ 0.1
- ☐ 0.2
- ☐ 0.25
- ☐ 0.3
- ☐ 0.35
- ☐ 0.4
- ☐ 0.5
- ☐ 0.52
- ☐ 0.7
- ☐ något annat värde

6. För en iterativ metod uppskattas felen e_n i iterationerna till

$$e_7 = 0.2477, \quad e_8 = 0.049, \quad e_9 = 0.0104, \quad e_{10} = 0.00198$$

Vilken konvergensordning motsvarar detta? **(2 p)**

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ annat

7. Styckvis linjär interpolation har noggrannhetsordning **(1 p)**

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

8. Värdet av $\int_0^\pi (\cos(\frac{x}{2}))^{\sin 2x}\,dx$ beräknas med trapetsregeln och steglängden $h = \pi/2$. Resultatet blir: **(2 p)**

- ☐ 0
- ☐ $\pi/4$
- ☐ $\pi/2$
- ☐ π
- ☐ $3\pi/4$
- ☐ 2π
- ☐ $5\pi/4$
- ☐ något annat värde

9. Vi vill beräkna $y = \sin(x)$ när x är behäftat med ett relativfel $r_x \ll 1$. Vad kan vi säga om relativfelet r_y i y (när x och y inte ligger nära noll)? **(1 p)**

- ☐ $r_y \approx \frac{r_x x}{\sin(x)}$
- ☐ $r_y \approx r_x \cos(x)$
- ☐ $r_y \approx \frac{r_x}{\sin(x)}$
- ☐ $r_y \approx \frac{r_x x}{\tan(x)}$
- ☐ $r_y \approx r_x \tan(x)$
- ☐ $r_y \approx \frac{r_x}{\cos(x)}$

V.g. glöm inte skriva ditt namn och personnummer överst på framsidan!

KTH Computer Science and Communication

Tentamen, del 2
DN1240 – Numeriska metoder gk II
F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

DEL 2: Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

1. Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som använder Newtons metod för att lösa det olinjära ekvationssystemet

$$\ln(x) + \sin(y) - 1/2 = 0,$$
$$\frac{x}{z^2} - \exp(-2x) - 1 = 0,$$
$$\sin(x+y) - \cos(z) = 0,$$

med ett fel i varje komponent av lösningen som är mindre än 10^{-10}. Använd startgissningen $x = y = z = 1$. **(12 p)**

2. Givet funktionen $y(x)$.

(a) Bestäm ett tredjegradspolynom som interpolerar $y(x)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$. Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur polynomet är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

(b) Bestäm en (styckvis polynom-) funktion $S(x)$ med egenskapen

i. $S(x)$ interpolerar $y(x)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$,
ii. $S(x)$ är ett förstagradspolynom i intervallet $[0, 1]$,
iii. $S(x)$ är ett tredjegradspolynom i intervallet $[1, 2]$,
iv. $S(x)$ är ett förstagradspolynom i intervallet $[2, 3]$,
v. $S'(x)$ kontinuerlig på hela intervallet $[0, 3]$.

Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur $S(x)$ är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

3. En variant av Van der Pol-generatorn beskrivs av den ordinära differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0.$$

(a) Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som beräknar lösningen x vid $t = 5$ för begynnelsedata $x(0) = 1$ och $x'(0) = 0$. Algoritmen ska vara baserad på Framåt Euler-metoden med steglängden $h = 0.01$. **(10 p)**

(b) Modifiera din algoritm så att den istället använder den implicita Bakåt Euler-metoden,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

Nya element kan behöva introduceras i algoritmen. **(6 p)**

4. Formulera finita differensmetoden för randvärdesproblemet

$$u_{xx} + xu_x - \sin(x)u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 2.$$

Visa hur metoden leder till ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$. Specificera elementen i A-matrisen och högerledet $\boldsymbol{b}$. Var noga med att definiera alla variabler du använder och förklara innebörden av elementen i lösningsvektorn $\boldsymbol{u}$. (Inga räkningar behöver genomföras dock.) **(12 p)**

KTH Computer Science and Communication

Tentamen, del 1 – Lösningar
DN1240 – Numeriska metoder gk II
F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

DEL 1: 20 poäng. Inga hjälpmedel. Betygsgräns för betyg E: 14 poäng (inkl. bonuspoäng).

1a. Ekvationen $x = 1 - 0.2e^{3x}$ ska lösas med Newtons metod. Utför en iteration med startapproximationen $x_0 = 0$. **(2 p)**

Lösning: Newtons metod appliceras på $f(x) = 0$ där

$$f(x) = 1 - 0.2e^{3x} - x, \qquad f'(x) = -0.6e^{3x} - 1.$$

Vi får

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -f(0)/f'(0) = -(1 - 0.2)/(-0.6 - 1) = 0.8/1.6 = 1/2.$$

$$\boxed{\text{Svar: } 1/2}$$

b. Villkoret för att fixpunktsiteration för samma ekvation som i del a, vars rot $= \alpha$ (och samma startapproximation) med iterationsformeln $x_{n+1} = 1 - 0.2e^{3x_n}$ ska konvergera lyder **(2 p)**

Lösning: Villkor för konvergens är $|\phi'(\alpha)| < 1$ där $\phi(x)$ är fixpunktfunktionen

$$\phi(x) = 1 - 0.2e^{3x}, \quad \phi'(x) = -0.6e^{3x}.$$

Detta ger

$$\boxed{\text{Svar: } \left|0.6e^{3\alpha}\right| < 1.}$$

2. En metod för numerisk integration har noggrannhetsordning p. Detta betyder att: **(2 p)**

$$\boxed{\text{Svar: trunkeringsfelet är proportionellt mot steglängden upphöjt till } p}$$

3. För att anpassa en linje till punkterna

$x =$	1	3	4	5	11	13
$y =$	2	2.2	2.5	3	4.4	5.2

används minstakvadratmetoden. Detta leder till ett överbestämt ekvationssystem $Ax \approx b$.

Vilken dimension har matrisen A? **(1p)**

Lösning: Systemt blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 11 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 2.2 \\ 2.5 \\ 3 \\ 4.4 \\ 5.2 \end{pmatrix}$$

Dvs,

$\boxed{\text{Svar: 6 rader, 2 kolumner}}$

Hur många ekvationer har normalekvationerna? **(1p)**

Lösning: Normalekvationerna är

$$A^T Ax = A^T b.$$

Eftersom $A^T A$ är en 2×2-matris får vi

$\boxed{\text{Svar: 2 st}}$

4a. Om lösning av ett fullt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär lösning av systemet med tusen obekanta? **(2 p)**

Lösning: Komplexiteten att lösa ett fullt system är $O(n^3)$. Därför får vi

$$\text{tid} \approx cn^3 \quad \Rightarrow \quad 0.1 \approx c50^3 \quad c \approx 0.1 \times 50^{-3}.$$

Utnyttja detta för att uppskatta tidsåtgången för det stora systemet

$$\text{tid stort system} \approx c1000^3 \approx 0.1(1000/50)^3 = 0.1 \times 20^3 = 800.$$

$\boxed{\text{Svar: 800 s}}$

b. Om lösning av ett tridiagonalt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär en effektiv lösning av systemet med tusen obekanta? **(2 p)**

Lösning: Komplexiteten att lösa ett tridiagonalt system med en effektiv metod är $O(n)$. Därför får vi

$$\text{tid} \approx cn \quad \Rightarrow \quad 0.1 \approx c50 \quad c \approx 0.1 \times 50^{-1}.$$

Utnyttja detta för att uppskatta tidsåtgången för det stora systemet

$$\text{tid stort system} \approx c1000 \approx 0.1(1000/50) = 0.1 \times 20 = 2.$$

$\boxed{\text{Svar: 2 s}}$

5. Differentialekvationen $y' = y^2 + \cos(\pi x)$, $y(1) = 1/2$, löses med Eulers metod och steglängden $h = 0.2$. Vad blir y-värdet vid $y(1.2)$? **(2 p)**

Lösning: Ett steg i Eulers metod lyder

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Här har vi

$$x_0 = 1, \; y_0 = 1/2, \; h = 0.2, \; f(x, y) = y^2 + \cos(\pi x).$$

Därför får vi

$$y_1 = \frac{1}{2} + 0.2\left(\frac{1}{2^2} + \cos(\pi 1)\right) = \frac{1}{2} + 0.2\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 0.35.$$

$$\boxed{\text{Svar: } 0.35}$$

6. För en iterativ metod uppskattas felen e_n i iterationerna till

$$e_7 = 0.2477, \quad e_8 = 0.049, \quad e_9 = 0.0104, \quad e_{10} = 0.00198$$

Vilken konvergensordning motsvarar detta? **(2 p)**

Lösning: Konvergensordning p innebär att $e_{n+1} \approx c e_n^p$ för något värde c. Här har vi

$$e_8/e_7 \approx e_9/e_8 \approx e_{10}/e_9 \approx 1/5 \quad \Rightarrow \quad \text{linjär (första ordnings) konvergens}$$

$$\boxed{\text{Svar: } 1}$$

7. Styckvis linjär interpolation har noggrannhetsordning **(1 p)**

$$\boxed{\text{Svar: } 2}$$

8. Värdet av $\int_0^\pi (\cos(\frac{x}{2}))^{\sin 2x}\, dx$ beräknas med trapetsregeln och steglängden $h = \pi/2$. **(2 p)**

Lösning: Funktionsvärdena vi behöver är

$$f(0) = 1^0 = 1, \quad f(\pi/2) = \cos(\pi/4)^0 = 1, \quad f(\pi) = 0^0 = 1.$$

Trapestregeln med $h = \pi/2$ blir

$$\int_0^\pi \left(\cos(\frac{x}{2})\right)^{\sin 2x} dx \approx h\left(\frac{1}{2}f(0) + f(\pi/2) + \frac{1}{2}f(\pi)\right) = \frac{\pi}{2}(1/2 + 1 + 1/2) = \pi.$$

$$\boxed{\text{Svar: } \pi}$$

9. Vi vill beräkna $y = \sin(x)$ när x är behäftat med ett relativfel $r_x \ll 1$. Vad kan vi säga om relativfelet r_y i y (när x och y inte ligger nära noll)? **(1 p)**

Lösning: Låt absolutfelet i x och y vara e_x respektive e_y. Då ger felfortplantingsformeln (Taylorutveckling):

$$e_y \approx e_x y'(x) \quad \Rightarrow \quad r_y = \frac{e_y}{y} \approx \frac{e_x}{x}\frac{x}{y}y'(x) = r_x \frac{x}{y} y'(x).$$

Här är $y'(x) = \cos(x)$,

$$r_y \approx r_x \frac{x}{\sin(x)} \cos(x) = \frac{r_x x}{\tan(x)}.$$

Dvs,

$$\boxed{\text{Svar: } r_y \approx \frac{r_x x}{\tan(x)}.}$$

KTH Computer Science
and Communication

Tentamen, del 2 – Lösningar
DN1240 – Numeriska metoder gk II
F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

DEL 2: Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

1. Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som använder Newtons metod för att lösa det olinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \ln(x) + \sin(y) - 1/2 &= 0, \\ \frac{x}{z^2} - \exp(-2x) - 1 &= 0, \\ \sin(x+y) - \cos(z) &= 0, \end{aligned}$$

med ett fel i varje komponent av lösningen som är mindre än 10^{-10}. Använd startgissningen $x = y = z = 1$. **(12 p)**

Lösning:

Vi vill alltså lösa $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = 0$, med

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \ln(x) + \sin(y) - 1/2 \\ \frac{x}{z^2} - \exp(-2x) - 1 \\ \sin(x+y) - \cos(z) \end{pmatrix}.$$

Newtons metod för system är

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - J(\boldsymbol{x}_n)^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n),$$

där J är jakobianen till $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3)^T$, dvs

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \cos(y) & 0 \\ \frac{1}{z^2} + 2e^{-2x} & 0 & \frac{-2x}{z^3} \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) & \sin(z) \end{pmatrix}.$$

En detaljerad algoritm i MATLAB med startgissningen $\boldsymbol{x}_0 = (1,1,1)^T$ som beräknar lösningen med ett fel på max 10^{-10} i varje komponent, skulle därför kunna se ut såhär:

```
X = [1; 1; 1];  % Startgissning
TOL = 1e-10;    % Feltolerans
r = X;          % Dummy, vadsomhelst större än TOL

while (norm(r,'inf')>TOL) % 'inf' ger maxnorm-fel

  x=X(1); y=X(2); z=X(3);

  f1 = log(x)+sin(y)-1/2;
  f2 = x/z^2-exp(-2*x)-1;
  f3 = sin(x+y)-cos(z);

  F = [f1; f2; f3];
  J = [1/x cos(y) 0; 1/z^2+2*exp(-2*x) 0 -2*x/z^3; cos(x+y) cos(x+y) sin(z)];

  r = -J\F;
  X=X+r;
end

disp('(x,y,z) =')
disp(X');
```

Algoritmen avbryter när $||\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n||_\infty = ||\boldsymbol{r}||_\infty$ är mindre än `TOL` varför felet också kommer vara mindre än `TOL`, i detta fall 10^{-10}. Lösningen blir

$$x \approx 0.608318, \qquad y \approx 1.647533, \qquad z \approx 0.685055.$$

2. Givet funktionen $y(x)$.

(a) Bestäm ett tredjegradspolynom som interpolerar $y(x)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$. Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur polynomet är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

Lösning:

Ansätt

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3. \tag{1}$$

(Newtons ansats är egentligen bättre, men i det här enkla fallet duger den naiva ansatsen.) Låt interpolationspunkterna vara $x_j = j$, $j = 0, \ldots, 3$. Polynomets koefficienter bestäms genom att lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{pmatrix}.$$

Relationen mellan c_j och polynomet är som givet i ansatsen (1).

(b) Bestäm en (styckvis polynom-) funktion $S(x)$ med egenskapen

i. $S(x)$ interpolerar $y(x)$ i punkterna $x = 0, 1, 2, 3$,
ii. $S(x)$ är ett förstagradspolynom i intervallet $[0, 1]$,
iii. $S(x)$ är ett tredjegradspolynom i intervallet $[1, 2]$,
iv. $S(x)$ är ett förstagradspolynom i intervallet $[2, 3]$,
v. $S'(x)$ kontinuerlig på hela intervallet $[0, 3]$.

Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur $S(x)$ är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

Lösning:

Funktionen $S(x)$ definieras av tre polynom,

$$S(x) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \le x \le 1, \\ p_2(x), & 1 \le x \le 2, \\ p_3(x), & 2 \le x \le 3. \end{cases} \tag{2}$$

Vi vet polynomens gradtal och vi kan göra följande ansatser

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x, \qquad p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3, \qquad p_3(x) = c_0 + c_1 x. \tag{3}$$

Interpolationsvillkoren för polynomen kan nu skrivas

$$\begin{aligned}
p_1(0) &= y(0), & \Rightarrow && a_0 &= y(0), \\
p_1(1) &= y(1), & \Rightarrow && a_0 + a_1 &= y(1), \\
p_2(1) &= y(1), & \Rightarrow && b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= y(1), \\
p_2(2) &= y(2), & \Rightarrow && b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 &= y(2), \\
p_3(2) &= y(2), & \Rightarrow && c_0 + 2c_1 &= y(2), \\
p_3(3) &= y(3), & \Rightarrow && c_0 + 3c_1 &= y(3).
\end{aligned}$$

Villkoret att $S'(x)$ är kontinuerlig ger slutligen

$$\begin{aligned}
p_1'(1) &= p_2'(1), & \Rightarrow && a_1 &= b_1 + 2b_2 + 3b_3, \\
p_2'(2) &= p_3'(2), & \Rightarrow && b_1 + 4b_2 + 12b_3 &= c_1,
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att

$$p_1'(x) = a_1, \qquad p_2'(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2, \qquad p_3'(x) = c_1.$$

I matrisform blir det linjära system som bildas av villkoren ovan,

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(2) \\ y(3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Relationen mellan koefficienterna a_j, b_j, c_j och $S(x)$ ges av (3) och (2).

3. En variant av Van der Pol-generatorn beskrivs av den ordinära differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1-x^2)\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0.$$

(a) Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som beräknar lösningen x vid $t = 5$ för begynnelsedata $x(0) = 1$ och $x'(0) = 0$. Algoritmen ska vara baserad på Framåt Euler-metoden med steglängden $h = 0.01$. **(10 p)**

Lösning:

Skriv först om ekvationen som ett första ordningens system genom att sätta

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Då får vi

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) =: \begin{pmatrix} u_2 \\ (1-u_1^2)u_2 - \sin(u_1) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Använd sedan Framåt Euler,

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_n).$$

I MATLAB blir det

```
h = 0.01;
u = [1 0]';

for t=0:h:5-h/2           % (-h/2 för att undvika avrundningsproblem)
  F = [u(2); (1-u(1)^2)*u(2)-sin(u(1))];
  u = u + h*F;
end

disp('(x, xp) = ')
disp(u');
```

(b) Modifiera din algoritm så att den istället använder den implicita Bakåt Euler-metoden,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

Nya element kan behöva introduceras i algoritmen. **(6 p)**

Lösning:

Eftersom Bakåt Euler är en implicit metod måste vi nu lösa ett olinjärt ekvationssystem för att stega fram från $\boldsymbol{u}_n$ till $\boldsymbol{u}_{n+1}$. Systemet är

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_{n+1}),$$

i vilket $\boldsymbol{u}_n$ är given och $\boldsymbol{u}_{n+1}$ är okänd. Med andra ord, vi behöver lösa $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = 0$ med

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}_n - h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

Ekvationen kan tex lösas med Newtons metod som i uppgift 1,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - J(\boldsymbol{x}_k)^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_k),$$

där jakobianen $J(\boldsymbol{x})$, med $\boldsymbol{x} = (x, y)$ är given av

$$J(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{x}} = I - h\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h(2xy + \cos(x)) & 1 - h(1 - x^2) \end{pmatrix}.$$

Startgissningen kan tex väljas som lösningen i förra tidssteget: $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{u}_n$. (Ett lite noggrannare alternativ är att välja startgissningen som resultatet av ett steg med *Framåt* Euler, dvs $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{u}_n + h\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_n)$.) Notera att vi nu alltså får två nivåer av iteration: den yttre tidsstegning $n = 0, 1, \ldots$ och den inre ekvationslösningsiterationen $k = 0, 1, \ldots$ som görs i varje tidssteg.
I MATLAB blir det tex

```
h = 0.01;
u = [1 0]';
TOL=1e-10; % Feltolerans

for t=0:h:5-h/2 % (-h/2 för att undvika avrudningsproblem)

  % Lös G(X)=0 med Newtons metod och startgissningen X=u_n

  r = [1; 1]; % Dummy, vadsomhelst större än TOL
  X = u;
  while (norm(r,'inf')>TOL) % 'inf' ger maxnorm-fel

    x=X(1); y=X(2);

    F = [y; (1-x^2)*y-sin(x)];
    G = [x-u(1)-h*F(1); y-u(2)-h*F(2)];
    J = [1 -h; h*(2*x*y+cos(x)) 1-h*(1-x^2)];

    r = -J\G;
    X=X+r;
  end
  u = X;  % u_{n+1} är lösningen
end

disp('(x, xp) = ')
disp(u');
```

4. Formulera finita differensmetoden för randvärdesproblemet

$$u_{xx} + xu_x - \sin(x)u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 2.$$

Visa hur metoden leder till ett linjärt ekvationssystem $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$. Specificera elementen i A-matrisen och högerledet $\boldsymbol{b}$. Var noga med att definiera alla variabler du använder och förklara innebörden av elementen i lösningsvektorn $\boldsymbol{u}$. (Inga räkningar behöver genomföras dock.) **(12 p)**

Lösning:

Börja med att diskretisera problemet och introducera notation för detta. Dela in intervallet $[0, \pi]$ i $n+1$ delar med längden $h = \pi/(n+1)$ och kalla delningspunkterna $x_j = jh$. Låt u_j approximera exakta lösningen i dessa punkter, dvs $u_j \approx u(x_j)$.

I varje inre punkt, $j = 1, \ldots, n$, approximerar vi sedan derivatorna i ekvationen med andra ordningens differenskvoter,

$$u_{xx}(x_j) \approx \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}, \qquad u_x(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}.$$

Det ger

$$\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + x_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \sin(x_j) u_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Multiplicera med h^2 och samla ihop termerna

$$u_{j-1}\left(1 - \frac{hx_j}{2}\right) + u_j\left(-2 - h^2 \sin(x_j)\right) + u_{j+1}\left(1 + \frac{hx_j}{2}\right) = 0, \tag{4}$$

där $j = 1, \ldots, n$. Vi har nu n ekvationer men $n+2$ obekanta. Utnyttja randvillkoren för att eliminera u_0 och u_{n+1}:

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = 2.$$

Detta ger för $j = 1$,

$$u_1\left(-2 - h^2 \sin(x_1)\right) + u_2\left(1 + \frac{hx_1}{2}\right) = 0, \tag{5}$$

och för $j = n$,

$$u_{n-1}\left(1 - \frac{hx_n}{2}\right) + u_n\left(-2 - h^2 \sin(x_n)\right) = -2\left(1 + \frac{hx_n}{2}\right), \tag{6}$$

Tillsammans ger (4,5,6) det linjära ekvationssystemet $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$ med $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

där

$$a_j = -2 - h^2 \sin(x_j), \quad b_j = 1 + \frac{hx_j}{2}, \quad c_j = 1 - \frac{hx_j}{2},$$

och högerledet

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2\left(1 + \frac{hx_n}{2}\right) \end{pmatrix}.$$