DN1212+DN1214+DN1215+DN1240+DN1241+DN1243 mfl
Lördag 2012-03-17, kl 9-12
Tentamen i Grundkurs i numeriska metoder
Del 1 (av 2)

Skrivtid 3 tim. **Inga hjälpmedel.** Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från vt11, ht11 eller vt12 och den kursomgång (program, termin) där poängen erhållits. Maximal poäng 20 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

Har du bonuspoäng?

☐ Antal: Från kursomgång:

(2p) 1. Newton-Raphsons metod tillämpad på ekvationen $x^2 - 3x + 4 = 0$ ser ut som

☐ $x_{n+1} = x_n + (2x_n - 3)/(x_n^2 - 3x_n + 4)$
☐ $x_{n+1} = x_n - (2x_n - 3)/(x_n^2 - 3x_n + 4)$
☐ $x_{n+1} = x_n + (x_n^2 - 3x_n + 4)/(2x_n - 3)$
☐ $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 3x_n + 4)/(2x_n - 3)$
☐ $x_{n+1} = x_n + (2x_n - 3)/2$
☐ $x_{n+1} = x_n - (2x_n - 3)/2$

(2p) 2. Störningsräkning används för att undersöka effekten av

☐ Beräkningsfelet
☐ Trunkeringsfelet
☐ Indatafelet/Tabellfelet
☐ Presentationsfelet

(3p) 3. Lägg ett interpolationspolynom av lämplig grad genom de tre mätpunkterna

x	0	1	2
y	1	2	4

Vad blir polynomets värde i x=0.2? (2p)

☐ 1
☐ 1.04
☐ 1.12
☐ 1.2
☐ 1.6
☐ 2

Vad blir polynomets värde i x=2? (1p)

☐ 2
☐ 2.5
☐ 3
☐ 4
☐ 4.5
☐ 5

(2p) 4. Differentialekvationerna

$$\begin{array}{c} y'' + 0.5yy' = sin(x) \\ z' - y' + zy = cos(y) \end{array}, \quad 0 \le x \le 5$$

skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (1p)

☐ 2
☐ 3
☐ 4
☐ 5
☐ omöjligt att säga

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

☐ 2
☐ 3
☐ 4
☐ 5
☐ omöjligt att säga

Var god vänd!

(2p) 5. En metod för att lösa differentialekvationer sägs vara av fjärde ordningen. Det innebär att

- ☐ Trunkeringsfelet avtar en faktor 4 vid varje steghalvering.
- ☐ Beräkningsfelet avtar en faktor 4 vid varje steghalvering.
- ☐ Globala felet är proportionellt mot $4h$
- ☐ Mängden beräkningsarbete ökar en faktor 4 vid varje steghalvering.
- ☐ Taylorutvecklingen av felet har 4 termer.
- ☐ Globala felet är proportionellt mot h^4

(2p) 6. Ekvationen $x^3 + 7x = 8 + \cos(x)$ har en rot nära $x = 1$. En lämplig form av fixpunktsiteration for att bestämma roten noggrannt är

- ☐ $x_{n+1} = (8 + \cos(x_n) - 7x_n)^{1/3}$
- ☐ $x_{n+1} = -(8 + \cos(x_n) - 7x_n)^{1/3}$
- ☐ $x_{n+1} = (8 + \cos(x_n) - (x_n)^3)/7$
- ☐ $x_{n+1} = -(8 + \cos(x_n) - (x_n)^3)/7$
- ☐ $x_{n+1} = \arccos(8 - 7x + (x_n)^3)$
- ☐ $x_{n+1} = -\arccos(8 - 7x + (x_n)^3)$

(4p) 7. Man vill med minstakvadratmetoden anpassa funktionen $p(x) = c_1x + c_2x^2$ till de tre mätpunkterna

x	0	1	2
y	1	2	4

Då får man c till (2p)

- ☐ $c = (0 \quad 1)^T$
- ☐ $c = (2 \quad 0)^T$
- ☐ $c = (1 \quad 1)^T$
- ☐ $c = (1/2 \quad 1/2 \quad 1)^T$
- ☐ $c = (1 \quad 1/2 \quad 1/4)^T$
- ☐ $c = (1 \quad 1/2 \quad 1)^T$

och residualen blir (2p)

- ☐ $r = (-0.4 \quad 0.4)^T$
- ☐ $r = (0.2 \quad -0.4)^T$
- ☐ $r = (0.1 \quad -0.2)^T$
- ☐ $r = (0 \quad 0 \quad 0)^T$
- ☐ $r = (-0.6 \quad 0.2 \quad 0.4)^T$
- ☐ $r = (1 \quad 0 \quad 0)^T$

(2p) 8. Om man använder Eulers metod och steglängden 0.5 på begynnelsevärdesproblemet
$y''' = x + y$ med $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$ och $y''(1) = 1$,

vilket värde får man på $y(2)$?

- ☐ 1.5
- ☐ 2.5
- ☐ 3
- ☐ 4.5
- ☐ 5
- ☐ 5.25

Vilket värde får man på $y'(1.5)$?

- ☐ 1.5
- ☐ 2.5
- ☐ 3
- ☐ 4.5
- ☐ 5
- ☐ 5.25

(1p) 9. Om man skattar integralen

$$\int_2^8 \cos(\pi x)dx$$

med trapetsregeln och intervallet uppdelat i tre (lika stora) delar vilket värde får man då?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 8

Tentan fortsätter med del 2.

DN1212+DN1214+DN1215+DN1240+DN1241+DN1243 mfl
Tentamen i Grundkurs i numeriska metoder
Del 2 (av 2)
Lördag 2012-03-17, kl 9-12

Skrivtid 3 tim. **Inga hjälpmedel.** Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p D, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

Var god notera att miniräknare **ej** är tillåten på denna tentamen.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses normalt beskrivning i Matlab.

Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade, tex $c = 0.5 \cdot 0.2^3 \cdot \cos(\pi/3)$ i stället för det uträknade $c = 0.002$

( ) **P0.** Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (linje och termin) där poängen erhållits. Endast poäng från senaste kursomgången är giltiga.

P1. Givet differentialekvationsproblemet

$$y''' = 8x - y^2 \qquad y(1) = 3 \quad y'(1) = 2 \quad y''(1) = 1$$

(4) **a)** Skatta $y'(1.5)$ och $y''(2)$ med Eulers metod och steget 0.5.

(4) **b)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att numeriskt skatta värdet av $y(3)$.

(2) **c)** Lägg till satser/detaljer som förklarar hur man ser till att lösningen har minst 2 säkra decimaler.

(2) **d)** Lägg till satser/detaljer som beskriver hur man åstadkommer en plot över $w(x) = y''(x)/y(x)$ som funktion av x över tidsintervallet $1 \leq x \leq 3$.

P2. I en park finns 5 vackra statyer utplacerade. Man vill anlägga en ellipsformad rullskridskobana i närheten av dessa statyer. Stayerna är placerade vid koordinaterna

x	2	2	4	6	8
y	2	4	1	5	3

Vi skall bestämma ellipsens halvaxlar a och b samt mittpunktskoordinater (x_m, y_m). Som bekant är ellipsen ekvation

$$\left(\frac{x - x_m}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_m}{b}\right)^2 = 1$$

(2) **a)** Föreslå rimliga värden på halvaxlarna och mittpunktskoordinaterna. Glöm inte motivera dina val.

(5) **b)** Antag att trädgårdsmästaren bestämmer att mittpunktskoordinaterna skall vara $(x_m, y_m) = (4, 2)$. Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att bestämma denna ellips halvaxlar a och b med minstakvadratmetoden. Ange vilket ekvationssystem du löser. Är det linjärt eller icke-linjärt?

(6) **c)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att med minstakvadratmetoden bestämma både ellipsens halvaxlar a och b och mittpunktskoordinater (x_m, y_m). (Dvs ignorera trädgårdsmästarens beslut och optimera även mittpunkten.) Ange vilket ekvationssystem du löser. Är det linjärt eller icke-linjärt?

Var god vänd

P3. Man vill bestämma k så att

$$\int_0^4 \frac{100\cos(kx)}{(x+k)}dx = k^2$$

(1) **a)** Problemet angrips genom nedbrytning till enklare numeriska problem. Vilka är de?

(2) **b)** Vilka numeriska metoder är bra att använda för dessa delproblem?

(6) **c)** k-värdet är nära 2. Beskriv med ett Matlab-program eller en detaljerad beskrivning hur man bestämmer k-värdet med cirka 3 decimaler.

P4. Man vill designa en bilprofil i längsled. Bakre kofångaren är vid $x = 0$ och den främre vid $x = 3.9$ (mätdata är givna i meter). Nio punkter längs profilen är givna

x	0.0	0.3	0.6	0.9	1.5	2.4	2.7	3.6	3.9
y	0.2	0.7	0.9	1.6	1.7	1.6	0.7	0.5	0.1

(4) **a)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att genom de 4 punkterna i bakre delen av bilen lägga ETT interpolationspolynom av lämplig grad. Programmet skall också rita upp polynomet och markera mätpunkterna.

(2) **b)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att rita upp den kurva som erhålls med styckvis linjär interpolation i de främre 6 punkterna. Programmet skall också markera mätpunkterna.

(3) **c)** Skriv ett Matlabprogram (eller ge en detaljerad algoritm) för att beräkna på vilken höjd bilens bak- respektive framlyktor hamnar om de ligger vid $x = 0.15$ respektive $x = 3.75$?

P5. Givet differentialekvationssystemet

$$y'' + xy + x = y' \qquad y(2) = 3 \quad y(4.5) = 0.6$$

(5) **a)** Härled det linjära ekvationssystem man får om man använder finita differensmetoden (FDM) med centraldifferenser och delar upp intervallet i 5 delar.

(1) **b)** Vilken storhet i deluppgift a innehåller approximationen av värdet i $y(3)$?

(1) **c)** Om man söker värdet av $y'(2)$, vad är nackdelen med att skatta derivatan med formeln $y'(2) \approx \frac{y(2+h)-y(2)}{h}$ med det h man använt i det linjära systemet för FDM emligt ovan?

Lycka till och gott fortsatt "nummande"!

DN1212+DN1214+DN1215+DN1240+DN1241+DN1243 mfl
Lördag 2012-03-17, kl 9-12
Tentamen i Grundkurs i numeriska metoder
Del 1 (av 2)

Skrivtid 3 tim. **Inga hjälpmedel.** Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från vt11, ht11 eller vt12 och den kursomgång (program, termin) där poängen erhållits. Maximal poäng 20 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

Har du bonuspoäng?

☐ Antal: Från kursomgång:

(2p) 1. Newton-Raphsons metod tillämpad på ekvationen $x^2 - 3x + 4 = 0$ ser ut som

☐ $x_{n+1} = x_n + (2x_n - 3)/(x_n^2 - 3x_n + 4)$
☐ $x_{n+1} = x_n - (2x_n - 3)/(x_n^2 - 3x_n + 4)$
☐ $x_{n+1} = x_n + (x_n^2 - 3x_n + 4)/(2x_n - 3)$
*☐ $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - 3x_n + 4)/(2x_n - 3)$
☐ $x_{n+1} = x_n + (2x_n - 3)/2$
☐ $x_{n+1} = x_n - (2x_n - 3)/2$

(2p) 2. Störningsräkning används för att undersöka effekten av

☐ Beräkningsfelet
☐ Trunkeringsfelet
*☐ Indatafelet/Tabellfelet
☐ Presentationsfelet

(3p) 3. Lägg ett interpolationspolynom av lämplig grad genom de tre mätpunkterna

x	0	1	2
y	1	2	4

Vad blir polynomets värde i x=0.2? (2p)

☐ 1
☐ 1.04
*☐ 1.12
☐ 1.2
☐ 1.6
☐ 2

Vad blir polynomets värde i x=2? (1p)

☐ 2
☐ 2.5
☐ 3
*☐ 4
☐ 4.5
☐ 5

(2p) 4. Differentialekvationerna

$$\begin{matrix} y'' + 0.5yy' = sin(x) \\ z' - y' + zy = cos(y) \end{matrix}, \quad 0 \le x \le 5$$

skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (1p)

☐ 2
*☐ 3
☐ 4
☐ 5
☐ omöjligt att säga

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

☐ 2
*☐ 3
☐ 4
☐ 5
☐ omöjligt att säga

Var god vänd!

(2p) 5. En metod för att lösa differentialekvationer sägs vara av fjärde ordningen. Det innebär att

- ☐ Trunkeringsfelet avtar en faktor 4 vid varje steghalvering.
- ☐ Beräkningsfelet avtar en faktor 4 vid varje steghalvering.
- ☐ Globala felet är proportionellt mot $4h$
- ☐ Mängden beräkningsarbete ökar en faktor 4 vid varje steghalvering.
- ☐ Taylorutvecklingen av felet har 4 termer.
- *☐ Globala felet är proportionellt mot h^4

(2p) 6. Ekvationen $x^3 + 7x = 8 + \cos(x)$ har en rot nära $x = 1$. En lämplig form av fixpunktsiteration for att bestämma roten noggrannt är

- ☐ $x_{n+1} = (8 + \cos(x_n) - 7x_n)^{1/3}$
- ☐ $x_{n+1} = -(8 + \cos(x_n) - 7x_n)^{1/3}$
- *☐ $x_{n+1} = (8 + \cos(x_n) - (x_n)^3)/7$
- ☐ $x_{n+1} = -(8 + \cos(x_n) - (x_n)^3)/7$
- ☐ $x_{n+1} = \arccos(8 - 7x + (x_n)^3)$
- ☐ $x_{n+1} = -\arccos(8 - 7x + (x_n)^3)$

(4p) 7. Man vill med minstakvadratmetoden anpassa funktionen $p(x) = c_1x + c_2x^2$ till de tre mätpunkterna

x	0	1	2
y	1	2	4

Då får man c till (2p)

- ☐ $c = (0 \quad 1)^T$
- *☐ $c = (2 \quad 0)^T$
- ☐ $c = (1 \quad 1)^T$
- ☐ $c = (1/2 \quad 1/2 \quad 1)^T$
- ☐ $c = (1 \quad 1/2 \quad 1/4)^T$
- ☐ $c = (1 \quad 1/2 \quad 1)^T$

och residualen blir (2p)

- ☐ $r = (-0.4 \quad 0.4)^T$
- ☐ $r = (0.2 \quad -0.4)^T$
- ☐ $r = (0.1 \quad -0.2)^T$
- ☐ $r = (0 \quad 0 \quad 0)^T$
- ☐ $r = (-0.6 \quad 0.2 \quad 0.4)^T$
- *☐ $r = (1 \quad 0 \quad 0)^T$

(2p) 8. Om man använder Eulers metod och steglängden 0.5 på begynnelsevärdesproblemet
$y''' = x + y$ med $y(1) = 3$, $y'(1) = 2$ och $y''(1) = 1$,

vilket värde får man på $y(2)$?

- ☐ 1.5
- ☐ 2.5
- ☐ 3
- ☐ 4.5
- ☐ 5
- *☐ 5.25

Vilket värde får man på $y'(1.5)$?

- ☐ 1.5
- *☐ 2.5
- ☐ 3
- ☐ 4.5
- ☐ 5
- ☐ 5.25

(1p) 9. Om man skattar integralen

$$\int_2^8 \cos(\pi x)dx$$

med trapetsregeln och intervallet uppdelat i tre (lika stora) delar vilket värde får man då?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- *☐ 6
- ☐ 8

Tentan fortsätter med del 2.

TENTAMEN 2012-03-17

Del 2

P1a

Det är en 3:e ordningens DE, som skrivs om till 3st första ordningens DE.

Inför u1=y, u2=y', u3=y'' och stega med Eulers metod:
y(n+1)=y(n)+h*y'(n)

x	u1	u2	u3	u1'=u2	u2'=u3	u3'= DE.
1.00000	3.00000	2.00000	1.00000	2.00000	1.00000	-1.00000
1.50000	4.00000	2.50000	0.50000	2.50000	0.50000	-4.00000
2.00000	5.25000	2.75000	-1.50000	2.75000	-1.50000	-11.56250
2.50000	6.62500	2.00000	-7.28125	2.00000	-7.28125	-23.89062

y'(1.5)=2.5, y''(1.5)=-1.5

P1b Endast de rader utan markeringar. (De med *** = P1c, +++ = P1d)

```
n=1000; x0=1; xN=3; u0=[3 2 1];
yy=[];                                        %*** För att kunna spara
for varv=1:2;                           %*** För att köra flera n
  x=x0; u=u0;
  xx=x; uu=u;                                 %+++ För att kunna spara
  for i=1:n;
    h=(xN-x0)/n;
    uprim=[u(2), u(3), 8*x-u(1)^2];
    u=u+h*uprim;
    x=x+h;
    xx=[xx;x]; uu=[uu;u];                     %+++ Spara alla delsteg
  end;
  yslut=u(1)
  yy=[yy;yslut];                              %*** Spara alla yslut
  n=2*n;                                      %*** Halverat steg i nästa
end;                                          %***
etrunk=abs(diff(yy))                          %*** Etrunk är skillnaden
% Om Etrunk för stort, öka n i början av prg.  %***
y=uu(:,1); ybis=uu(:,3); w=ybis./y;           %+++ Plocka ut rätt vektor
plot(xx,w);                             %+++
```

Ursprungsprogrammet kör en Euler med 1000 delsteg.
I P1c körs Eulern två gångar, med olika n och kollar skillnaden i slut-y.
I P1d sparas alla värden vi stegat igenom i xx & uu.

P2a

Plottar man de givna punkterna ser man att de ligger rätt jämnt fördelade över ellipsen. Bra skattningar för medelunkten blir då tex medelvärdet eller värdet mittemellan min-o-max. Halvaxlarna som avståndet från medelpunkten till min eller max.

```
xm:  medel=4.4,  mitt=(2+8)/2=5
ym:  medel=3.0,  mitt=(1+5)/2=3     vilket ger   a=3 b=2 (lite grovt)
```

P2b

Om xm och ym är fixerade är problemet linjärt i 1/a^2 resp 1/b^2. Lös med MKV det linjära problemet:

```
   c1*(x-xm)^2 + c2*(y-ym)^2 = 1
```

i Matlab:

```
  x=[2 2 4 6 8]';  y=[2 4 1 5 3]'; xm=...; ym=...;
  A=[(x-xm).^2 (y-ym).^2]; b=ones(size(x));
  c=A\b;
  a=sqrt(1/c(1))
  b=sqrt(1/c(2))
```

P2c

Nu är det ickelinjärt, så det måste lösas med Gauss-Newton. Startvärden enligt a-uppgiften.

```
c0=[5 3 3 2]; % startvarden [xm a ym b]
t=1; c=c0(:); it=0;
while (norm(t)>1e-6)&(it<12);
  f=((x-c(1))/c(2)).^2+((y-c(3))/c(4)).^2-1;
  J=[-2*(x-c(1))/(c(2))^2,   -2*(x-c(1)).^2/(c(2))^3, ...
     -2*(y-c(3))/(c(4))^2,   -2*(y-c(3)).^2/(c(4))^3];
  t=J\f;
  tn=norm(t)
  c=c-t;
  it=it+1;
end;
c'

xm=c(1), ym=c(3), a=c(2), b=c(4);
```

P3a Integralskattning och ekvationslösning.

P3b Trapetsregeln för integralen och sekantmetoden för ekavtionslösningen.

P3c

```
  k0=2;  k1=3;

  h=0.1;
  x=0:h:4;
  y0=100*cos(k0*x)./(x+k0);
  int0=h*(sum(y0)-(y0(1)+y0(end))/2);
```

```
  f0=int0-k0^2;

  t=1;
  while abs(t)>1e-5;

    y1=100*cos(k1*x)./(x+k1);
    int1=h*(sum(y1)-(y1(1)+y1(end))/2);
    f1=int1-k1^2;

    t=f1*(k1-k0)/(f1-f0)
    k0=k1; f0=f1;
    k1=k1-t;
  end;
k=k1
```

P4a

```
  X=[0.0 0.3 ....]';  Y=[0.2 0.7 ....]';  % mätdata
  ij=1:4; x=X(ij); y=Y(ij);
  c=polyfit(x,y,3);
  xx=0.0:0.001:0.9;
  yy=polyval(c,xx);
  plot(xx,yy,x,y,'o');
```

P4b   fortsätter programmet:

```
  ij=4:9;
  plot(X(ij),Y(ij),'-o');
```

P4c   fortsätter programmet:

```
  baklykta=polyval(c,0.15)

  ij=8:9;
  k=polyval(X(ij),Y(ij),1);  % beräkna sista linjen
  framlykta=polyval(k,3.75)
```

P5a

```
  y'' + xy + x = y'  skrivs om till   y'' - y' + xy = -x

  Diskretisera med h=0.5: x0=2, x5=4.5;
  Ersätt alla derivator med differenser:

  [y(i-1)-2*y(i)+y(i+1)]/h^2 - [y(i+1)-y(i-1)]/(2*h) + x(i)*y(i) = -x(i),
i=1:4

  Samla ihop på index hos y:

  [1/h^2 + 1/(2*h)]*y(i-1) + [x(i)-2/h^2]*y(i) + [1/h^2 - 1/(2*h)]*y(i+1)
=-x(i)

  med 1/h^2 = 4,  1/(2*h)=1

  Ger:

   [ x1-8   4-1   0      0    ]      [  y1 ]     [ -x1  - (4+1)*y0   ]
   [ 4+1    x2-8  4-1    0    ]      [  y2 ]     [ -x2               ]
```

```
   [ 0      4+1   x3-8   4-1  ]   *  [  y3 ]   = [ -x3                ]
   [ 0      0     4+1    x4-8 ]      [  y4 ]     [ -x4  - (4-1)*y5   ]
```

P5b

x0=2, x1=2.5, x2=3.0, x3=3.5, x4=4.0 och x5=4.5 så sökt y är y2.

P5c

FDM är av noggrannhetsordning 2, dvs felet är proportionellt mot h^2,
så det blir en fjärdedel så stort om steglängden halveras.

Den givna formeln är bara av ordning 1, dvs onödigt grov.
(En bättre formel finns tex i exempelsamlingens uppgift 1.3)