DN1212+DN1214+DN1215+DN1240+DN1241+DN1243 mfl
Tisdag 2011-01-11, kl 10-13
Tentamen i Grundkurs i numeriska metoder
Del 1 (av 2)

Skrivtid 3 tim. **Inga hjälpmedel.** Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från ht10 eller vt10 och den kursomgång (program, termin) där poängen erhållits. Maximal poäng 20 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

(2p) 1. Vad får man för värde om man i tabellen skattar $y(6)$ med ...

x	3	4	5	7
y	2	3	6	9

... linjär interpolation?

- ☐ 7.0
- ☐ 7.5
- ☐ 7.75
- ☐ 8.0
- ☐ 8.5
- ☐ 8.75

... kvadratisk interpolation?

- ☐ 7.0
- ☐ 7.5
- ☐ 7.75
- ☐ 8.0
- ☐ 8.5
- ☐ 8.75

(1p) 2. Vilken typ av konvergens bör Newtons metod för lösning av $f(x) = 0$ ha?

- ☐ Ingen
- ☐ Oregelbunden
- ☐ Linjär
- ☐ Superlinjär
- ☐ Kvadratisk
- ☐ Kubisk

(2p) 3. Ekvationen $x^3 - 7x - 2 = 0$ har en rot nära $x = 2$. Vad blir nästa iterat med Newtons metod med detta startvärde?

- ☐ 2.2
- ☐ 2.6
- ☐ 2.8
- ☐ 3.0
- ☐ 3.2
- ☐ 3.6

(1p) 4. Vilken av nedanstående metoder används till interpolation?

- ☐ Newton
- ☐ Hermite
- ☐ Sekant
- ☐ Kvadratur
- ☐ Fixpunkt
- ☐ Runge-Kutta
- ☐ Gauss-Newton

(2p) 5. Vilket värde får man om man skattar integralen $\int_1^2 2x^2 dx$ med trapetsregeln och ...

... steglängden 1?

- ☐ $4\frac{1}{2}$
- ☐ $4\frac{2}{3}$
- ☐ $4\frac{3}{4}$
- ☐ $4\frac{4}{5}$
- ☐ $4\frac{5}{6}$
- ☐ 5

... steglängden 0.5?

- ☐ $4\frac{1}{2}$
- ☐ $4\frac{2}{3}$
- ☐ $4\frac{3}{4}$
- ☐ $4\frac{4}{5}$
- ☐ $4\frac{5}{6}$
- ☐ 5

(1p) 6. En metod för lösning av $f(x) = 0$ har genererat en serie x_n-värden med de successiva skillnaderna (avrundade till 6 decimaler) 0.100000, 0.060000, 0.004200, 0.033600, 0.030240... Vad kan vi säga om metodens konvergens mot roten?

- ☐ Den är inte konvergent
- ☐ Det är linjär konvergens
- ☐ Det är kvadratisk konvergens
- ☐ Det är kubisk konvergens
- ☐ Det är en annan typ av konvergens

(1p) 7. Man har gjort två beräkningar av en integral med trapetsregeln med steglängderna h och $h/2$. Hur bör man kombinera dessa för att erhålla en normalt bättre approximation?

- ☐ $T(h) + (T(h) - T(h/2))/3$
- ☐ $T(h) - (T(h) - T(h/2))/3$
- ☐ $T(h) - (T(h) + T(h/2))/3$
- ☐ $T(h/2) + (T(h/2) - T(h))/3$
- ☐ $T(h/2) - (T(h/2) - T(h))/3$
- ☐ $T(h/2) - (T(h/2) + T(h))/3$

(2p) 8. Givet differentialekvationsproblemet $y''\,x + y'\,x^2 = 2$, $y(2) = 4$ och $y'(2) = 1$ Vad blir med Eulers metod och steget 0.5 ...

... värdet på $y(2.5)$?

- ☐ $4\frac{1}{2}$
- ☐ $4\frac{2}{3}$
- ☐ $4\frac{3}{4}$
- ☐ $4\frac{4}{5}$
- ☐ $4\frac{5}{6}$
- ☐ 5

... värdet på $y(3.0)$?

- ☐ $4\frac{1}{2}$
- ☐ $4\frac{2}{3}$
- ☐ $4\frac{3}{4}$
- ☐ $4\frac{4}{5}$
- ☐ $4\frac{5}{6}$
- ☐ 5

(1p) 9. Vilken noggrannhetsordning har Runge-Kuttas standardmetod?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

(1p) 10. Vilken av nedanstående metoder används till att lösa begynnelsevrdesproblem fr differentialekvationer?

- ☐ Newton
- ☐ Hermite
- ☐ Sekant
- ☐ Kvadratur
- ☐ Fixpunkt
- ☐ Runge-Kutta
- ☐ Gauss-Newton

(2p) 11. En metod med två parametrar $f(x, y)$ ger följande värden vid anrop:

$$f(1.00, 2.00) = 8.0,\; f(1.01, 2.00) = 8.4$$
$$f(1.00, 2.01) = 7.8,\; f(1.01, 2.01) = 8.3$$

Skatta gränsen för tabellfelet (osäkerheten i $f(x, y)$-värdet) då $x = 1.00 \pm 0.02$ och $y = 2.00 \pm 0.03$

- ☐ 0.05
- ☐ 0.2
- ☐ 0.3
- ☐ 0.7
- ☐ 0.9
- ☐ 1.0
- ☐ 1.2
- ☐ 1.5

(2p) 12. Parametrarna c_1 och c_2 bestäms med minstakvadratanpassning av formeln $f = c_1 + c_2\,x^3$ till mätdata enligt tabellen nedan. Avrundade till två decimaler blir då c_1 och c_2 ?

x	-1	0	1	2
y	2	1	2	10

- ☐ $c_1 = 1.00\ c_2 = 2.00$
- ☐ $c_1 = 1.00\ c_2 = 1.75$
- ☐ $c_1 = 1.33\ c_2 = 1.42$
- ☐ $c_1 = 1.42\ c_2 = 1.33$
- ☐ $c_1 = 1.67\ c_2 = 1.50$
- ☐ $c_1 = 1.75\ c_2 = 1.00$

(1p) 13. Ekvationen $x^3 - 4x + 2.95 = 0$ har en rot mellan 0.5 och 1 som ligger nära 1. Vilken iterationsformel är snabbast för att hitta den?

- ☐ $x_{n+1} = (x_n^3 + 2.95)/4$
- ☐ $x_{n+1} = x_n/2 + (x_n^3 + 2.95)/8$
- ☐ $x_{n+1} = 3(-2x_n/3 + (x_n^3 + 2.95)/4)$
- ☐ $x_{n+1} = x_n - (x_n^3 - 4x_n + 2.95)$

(1p) 14. Man har anpassat en kurva med tre parametrar med minstakvadratmetoden till 20 mätpunkter. Hur många ekvationer får normalekvationerna om man anpassar till 40 mätpunkter istället?

- ☐ Hälften så många
- ☐ Lika många
- ☐ Dubbelt så många
- ☐ Fyra gånger så många

Tentan fortsätter med del 2.

DN1212+DN1214+DN1215+DN1240+DN1241+DN1243 mfl
Tentamen i Grundkurs i numeriska metoder
Del 2 (av 2)
Tisdag 2011-01-11, kl 10-13

Skrivtid 3 tim., inga hjälpmedel.

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng från årets laborationer (max 4p).

Var god notera att miniräknare **ej** är tillåten på denna tentamen.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses normalt beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade, tex
$c = 0.5 \cdot 0.2^3 \cdot \cos(\pi/3)$ i stället för det uträknade $c = 0.002$

———000———

(-) P0. Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (linje och termin) där poängen erhållits. Endast poäng från och med läsåret 09/10 är giltiga.

(14) P1. Man skall beräkna rörelsen för en laddad partikel som startar i origo med hastighet V längs y-axeln och utsätts för ett magnet-fält riktat längs z-axeln ($' = d/dt$):

$$x'' = -y', y'' = x', x(0) = y(0) = x'(0) = 0; y'(0) = V$$

a) (3) Inför lämpliga beteckningar och skriv systemet som ett system av första ordningens differentialekvationer. Glöm inte begynnelsevillkoren!
b) (8) Skriv ett Matlab-program som med Eulers metod med steget h beräknar lägena (x_i, y_i) och hastigheterna (x'_i, y'_i) vid tidpunkterna $t_i = ih$ för $i = 1, 2, ..., I$, där I är det första i där $y_i < 0$. Programmet skall sedan plotta banan $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., I$. Banan blir cirkel-lik. Förklara varför `axis equal` ä r mycket lämpligt!
c) (3) Lägg till några Matlab-satser som med linjär interpolation beräknar och skriver ut var partikeln träffar x-axeln.

(8) P2. Goding i Repris
"Varje år kungörs årets rekordpumpa i tidskriften Pumpavännen. Tyvärr är vårt exemplar för år 2007 sönderläst, vi behöver din hjälp att med interpolation ta reda på hur många kg rekordpumpan vägde då."

`t, År`	2005	2006	2007	2008	2009
`m, rekordvikt i kg`	200	208	X	254	286

a) (6) Bestäm koefficienterna i Newtons ansats på interpolationspolynomet $P(t)$ till data för $t = 2005, 2006, 2008$ och 2009. Beräkna sedan $P(2007)$.
b) (2) Visa, att om vikten för 2009 ändras med dm_{2009} så ändras $P(2007)$ med $-dm_{2009}/6$.

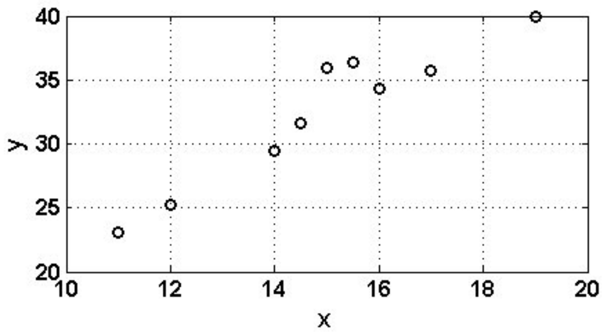
(13) P3. Parametrarna c_1, c_2, c_3 och c_4 i modellen

$$y = c_1 x + c_2 \mathrm{e}^{c_3(x-c_4)^2}$$

skall minstakvadrat-anpassas till mätdata, som visas i tabellen och figuren.

a) (4) Ur bredden på puckeln kan man skatta ett värde på c_3 till $c_3 = -3$. Förklara hur de andra parametrarna kan uppskattas från figuren !
b) (8) Antag nu att data finns i Matlab som kolonn-vektorerna `x` och `y`, och att värdet på c_1 redan har bestämts och finns i `c1`. Skriv ett Matlab-program som minstakvadrat-anpassar ett andragradspolynom $a_1x^2 + a_2x + a_3$ till $ln(y - c_1x)$ och sedan beräknar c_2, c_3 och c_4 från a_i. Programmet skall även plotta den anpassade kurvan $c_1x + c_2\mathrm{e}^{c_3(x-c_4)^2}$ och markera de givna mätpunkterna.

x	11	12	14	14.5	15	15.5	16	17	19
y	23.1	25.2	29.5	31.6	35.9	36.4	34.3	35.7	39.9



(15) P4. Betrakta ekvationen

$$f(k) = \int_3^6 \cos(1 + kx^2)dx - k = 0$$

a) Visa, att det finns (minst) ett nollställe i intervallet $(0, 3)$ genom att
(1) beräkna $f(0)$. Använd $cos1 \approx 0.6$.
(3) och visa, att $f(3) \leq 0$. Ledning: Integralen kan överskattas med $cos(1 + kx^2) \leq 1$
b) (3) Tag $k_0 = 0$ som startgissning och gör en Newton-iteration. Vad blir k_1? Använd $sin1 \approx 0.8$ i räkningen.
c) (8) Nu ska du behandla några viktiga delar (1,2,3) i en algoritm för beräkning av k. Programkod behövs inte. Inför lämpliga beteckningar och 1. beskriv vilka delproblem som behöver lösas och 2. vilka numeriska metoder som är lämpliga. 3. Diskutera hur trunkeringsfelen i metoderna bidrar till felet i det som söks.

Lycka till och gott fortsatt ”nummande”!

Lösning Del 1 11-01-11 DN1212 etc.

1. Interpolation	**linjär 7.5 kvadratisk 8.0**
2. typ av konvergens	**kvadratisk**
3. Rot nära 2, Newton:	**3.6**
4. Metod för interpolation	**Hermite**
5. Skatta integralen	**steglängd 1: 5 steglängd 1/2: 4.75**
6. Serie *x*-värden	**Annan typ av konvergens**
7. $T(h)$	**$T(h/2)+(T(h/2)-T(h))/3$**
8. Differentialekvation	**$y(2.5) = 4.5$, $y(3) = 4.75$**
9. RungeKutta	**Ordning 4**
10. Metod för …	**Runge-Kutta**
11. Metod två variabler	**max fel 1.4**
12. c1 och c2	**c1 = 1.75, c2 = 1.00**
13. Rot mellan 0.5 och 1	**$x_{n+1} = (x_n^3 + 2.95)/4$**
14. Tre parametrar	**Lika många.**

P1.

a) u1 = x, u2 = x', u3 = y, u4 = y'

$$u1' = u2, u1(0) = 0$$
$$u2' = -u4, u2(0) = 0$$
$$u3' = u4, u3(0) = 0$$
$$u4' = u2, u4(0) = V$$

b) (man bör pre-allokera u1 u2 u3 och u4)

```
V = 1; h = 0.01;
u1(1)=0;u2(1)=0;u3(1)=0;u4(1)=V;
k = 1;
while u3(k) >= 0
   u1(k+1)=u1(k)+h*u2(k);
   u2(k+1)=u2(k)-h*u4(k);
   u3(k+1)=u3(k)+h*u4(k);
   u4(k+1)=u4(k)+h*u2(k);
k = k+1;
end
plot(u1,u3); axis equal
```

c)

```
x = u1(k-1)+u3(k-1)/(u3(k-1)-u3(k))*(u1(k)-u1(k-1));
disp(['x-cut:',num2str(x)]);
```

P2.

a) $P(t) = a1 + a2 \cdot (t\text{-}2005) + a3 \cdot (t\text{-}2005)(t\text{-}2006) + a4 \cdot (t\text{-}2005)(t\text{-}2006)(t\text{-}2008)$

$P(2005) = 200 = a1$, $P(2006) = 208 = 200 + a2 \cdot 1$, $a2 = 8$

$P(2008) = 254 = 200 + 8 \cdot 3 + a3 \cdot 3 \cdot 2$, $a3 = 5$

$P(2009) = 286 = 200 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + a4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$, $a4 = -1/2$

$P(2007) = 200 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 - 1/2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 227$

b) Om vikten för 2009 är m, så

$m = 200 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + a4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1$, $a4 = (m\text{-}292)/12$

och

$P(2007) = 200 + 8 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + (m\text{-}292)/12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)$

så $dP(2007)/dm = -1/6$. QED

P3.

a) Man ser en rät linje med en puckel på; dess topp vid $x = c_4$ synes vara vid ca 15.3 och lutningen c_1 på linjen genom origo är ungefär 40/19. Toppens höjd är lättare att bedöma om man ritar in linjen, och blir ca 5. Alltså: $c_1 = 40/19$, $c_2 = 5$, $c_4 = 15.3$.

b) Formler:

$$\ln(c_2 e^{c_3(x-c_4)^2}) = \ln c_2 + c_3 x^2 - 2c_3 c_4 x + c_3 c_4^2 = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

$$c_3 = a_1, c_4 = -a_2/(2a_1), c2 = e^{a_3 - c_3 c_4^2}$$

(forts. på sid 2)

```
Matlab
x = …; y  …; c1 = …;
f = log(y-c1*x);
a = polyfit(x,f,2);
% eller
% a = [x.^2 x ones(size(x))]\f;
c3 = a(1);
c4 = -a(2)/(2*c3);
c2 = exp(a(3)-c3*c4^2);
plot(x,y,'o'); hold on;
xpl = linspace(min(x),max(x),200)';
ypl = c1*xpl + c2*exp(c3*(xpl-c4).^2);
plot(xpl,ypl);
```

P4

a) $$f(0) = \int_3^6 \cos(1)dx - 0 \approx 3 \cdot 0.6 = 1.8$$

b) $$f(3) \le \int_3^6 1dx - 3 = 0$$

c)
$$\frac{df}{dk} = \int_3^6 -\sin(1+kx^2)x^2 dx - 1; \; f'(0) = -\sin(1)/3(6^3 - 3^3) - 1 \approx -51.4$$

$$k_1 = 0 - \frac{1.8}{-51.4} \approx 0.035$$

d) 1. Man behöver en funktion säg $I(k)$ som beräknar integralen för olika k, och en metod för att lösa en icke-linjär ekvation $f(k) = I(k) - k = 0$
2. I(k): Integranden är analytisk, och för små k blir det inte många perioder av cos, så man kan använda trapetsregeln, eller i Matlab någon inbyggd metod som `quadl` eller `quad8` . För ekvationslösning går det bra med Newtons metod: vi har en enkel formel ovan för *df/dk*,
3. Två felkällor, i) Beräkning av $f(k)$, där felet kommer ifrån kvadratur-formeln, ii) Avbrott av iterationerna i ekvationslösningen. För Newtons metod kan ii) göras försumbart: f har en kontinuerlig derivata så det blir kvadratisk konvergens mot ett enkelt nollställe. Om man beräknar f med ett fel < ε blir felet dk i beräknat nollställe begränsat av $|dk| \le \dfrac{\varepsilon}{|I'(k) - 1|}$