

**Tentamen i Komplex analys (TATA45)**

**2018-01-10 kl 14.00–19.00**

Inga hjälpmedel är tillåtna. Fullständiga lösningar krävs. Varje uppgift ger 0–3 poäng, och för betyg 3/4/5 räcker 8/11/14 poäng och 3/4/5 uppgifter bedömda med minst 2 poäng vardera. Lösningsskisser publiceras på kurshemsidan preliminärt kl 21.00.

- (a) Beräkna alla värden på  $(-i)^i$ .  
(b) Lös ekvationen  $\cos z = 3i/4$ .  
(c) Om  $f(z)$  är principalgrenen till  $z^{1/2}$ , beräkna  $f'(2i)$ .  
Svara i rektangulär form i alla deluppgifterna, alltså i formen  $a + ib$ , där  $a, b \in \mathbf{R}$ .
- Beräkna med residykalkyl

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - i} \quad \text{och, enklast genom att betrakta } \operatorname{Im} I, \text{ även } J = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

- Bestäm antalet nollställen som polynomet

$$p(z) = z^4 - 3iz^2 - 8z + 3i$$

har i (a) undre halvplanet  $\operatorname{Im} z < 0$  (b) cirkelskivan  $|z| \leq 1$ . (2p+1p)

- (a) Bestäm en Möbiusavbildning  $w(z)$  som avbildar punkterna  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = i$  och  $z_3 = 1$  på i tur och ordning  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = i$  och  $w_3 = \infty$ . Låt sedan  $\Omega$  vara halvcirkelskivan  $|z| < 1$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ . Vad blir bilden i  $w$ -planet av  $\Omega$ ? (2p)  
(b) Bestäm en funktion  $T$  som är harmonisk i området  $\Omega$  från (a) och som har randvärdena  $T = 0$  på sträckan (d.v.s. linjestycket, "raka spåret") från  $z = -1$  till  $z = 1$  och  $T = 1$  på halvcirkeln från  $z = -1$  via  $z = i$  till  $z = 1$ . (1p)
- Låt  $f(z) = \operatorname{Log} \frac{z-i}{z+i}$ , där  $\operatorname{Log}$  som vanligt står för principallogaritmen.

- (a) Bestäm största möjliga område  $\Omega \subseteq \mathbf{C}$  där  $f$  är analytisk. Vad blir  $f'$  där?  
(b) Beräkna kurvintegralerna

$$I_C = \int_C \frac{dz}{1+z^2} \quad \text{och} \quad I_L = \int_L \frac{dz}{1+z^2},$$

där  $C$  är halvcirkeln från  $-2 - i$  via  $i\sqrt{5}$  till  $2 + i$  och  $L$  är sträckan från  $-2 - i$  till  $2 + i$ .  
Svara i rektangulär form.

- Antag att  $f$  är analytisk i enhetsskivan  $|z| < 1$  och att  $|f(z)| \leq 1/(1 - |z|)$  där. Visa att det finns en konstant  $C$  sådan att

$$|c_n| \leq C(n+1), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där  $c_0, c_1, c_2, \dots$  är Maclaurinkoefficienterna för  $f$ .

- Antag att  $u$  är reell och harmonisk i ett område  $\Omega \subseteq \mathbf{C}$  (som vi som vanligt identifierar med  $\mathbf{R}^2$  via  $x + iy \leftrightarrow (x, y)$ ) och att beloppet av dess gradient,  $|\nabla u|$ , antar ett största värde någonstans i  $\Omega$ . Vad kan då sägas om  $u$ ?

TATA45 Komplex analys 2018-01-10, lösningsskisser

1. (a)  $(-i)^i = \exp(i \log(-i)) = \exp(i(-i\pi/2 + i2n\pi)) = e^{\pi/2 - 2n\pi}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Svar:  $e^{\pi/2 - 2n\pi}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .  
 (b) Låt  $w = e^{iz}$ ; då är  $w \neq 0$ , och  $\cos z = 3i/4 \Leftrightarrow w + 1/w = 3i/2 \Leftrightarrow w^2 - 3iw/2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (w - 3i/4)^2 = -25/16 = (5i/4)^2 \Leftrightarrow w = 2i$  eller  $w = -i/2$ , vilket, eftersom  $z = -i \log w$ , efter förenkling ger: Svar:  $z = \pi/2 + 2m\pi - i \ln 2$  eller  $z = -\pi/2 + 2n\pi + i \ln 2$ ,  $m, n \in \mathbf{Z}$ .  
 (c)  $f(z) = \exp((\text{Log } z)/2)$ , så  $f'(z) = (1/2z) \exp((\text{Log } z)/2)$ , som i punkten  $z = 2i$  ger  $f'(2i) = (1/4i) \exp((\ln 2 + i\pi/2)/2) = (\sqrt{2} e^{i\pi/4})/4i = (1+i)/4i = (1-i)/4$ . Svar:  $(1-i)/4$ .
2. Sätt  $f(z) = 1/(z^3 - i)$ ; då är  $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ .  $f$  är singularär där  $z^3 = i$ , som är en binomisk ekvation med enkelrötterna  $z_1 = e^{i\pi/6}$ ,  $z_2 = e^{i5\pi/6}$  och  $z_3 = e^{i9\pi/6} = -i$ . I detta fall är det därför enklast att integrera  $f$  längs konturen  $C_R^- - L_R$  (observera orienteringen), där  $C_R^-$  är halvcirkeln från  $-R$  till  $R$  i undre halvplanet och  $L_R$  är sträckan från  $-R$  till  $R$ , se figur i uppgift 3 nedan.

Om  $R$  är stort nog ( $R > 1$ ) medför residysatsen att

$$(*) \quad \int_{C_R^- - L_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=-i} f(z) = 2\pi i \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^3 - i)|_{z=-i}} = 2\pi i \frac{1}{3z^2}|_{z=-i} = -\frac{2\pi i}{3}.$$

Vidare, eftersom  $|z^3 - i| \geq |z|^3 - |-i| = R^3 - 1 > 0$  på  $C_R^-$  om  $R$  är stort ( $R > 1$ ) får vi ML-uppskattningen

$$\left| \int_{C_R^-} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^3 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{då } R \rightarrow \infty,$$

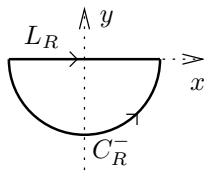
så  $\int_{C_R^-} f(z) dz \rightarrow 0$  då  $R \rightarrow \infty$ . Dessutom ser vi att  $\int_{L_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(t) dt \rightarrow I$  då  $R \rightarrow \infty$ , så genom att låta  $R \rightarrow \infty$  i (\*) får vi slutligen att  $0 - I = -2\pi i/3$ , d.v.s. att  $I = 2\pi i/3$ .

Nu kan vi enkelt beräkna  $J = \int_0^{\infty} dx/(1+x^6)$  m.h.a.  $\text{Im } I$ :

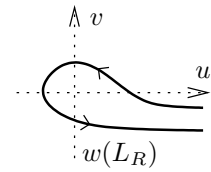
$$\text{Im } I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - i} \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \left( \frac{1}{x^3 - i} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \left( \frac{x^3 + i}{x^6 + 1} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} \stackrel{(2)}{=} 2J,$$

där (1) beror på att integrationsvariabeln  $x$  är reell och (2) på att funktionen  $x \mapsto 1/(x^6 + 1)$  är jämn; m.a.o. är  $J = (\text{Im } I)/2 = \pi/3$ . Svar:  $I = 2\pi i/3$  och  $J = \pi/3$ .

3. (a) Vi studerar argumenttillskottet för  $p(z) = z^4 - 3iz^2 - 8z + 3i$  när  $z$  genomlöper kurvan  $\Gamma_R = C_R^- - L_R$  (se figur nere till vänster; observera orienteringen). På  $C_R^-$  får vi tillskottet  $\Delta_{C_R^-} \arg p(z) = \Delta_{C_R^-} \arg z^4 + \Delta_{C_R^-} \arg(1 - 3i/z^2 - 8/z^3 + 3i/z^4) \rightarrow 4 \cdot \pi + 0 = 4\pi$  då  $R \rightarrow \infty$ . På  $L_R$  får vi  $p(z) = p(x) = (x^4 - 8x) + i(3 - 3x^2) = x(x^3 - 8) + i3(1 - x^2) = u + iv$ , och därmed följande teckentabell för  $u$  och  $v$ :



$x$	$<$	$-1$	$<$	$0$	$<$	$1$	$<$	$2$	$<$
$u$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$
$v$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$-$



Dessutom får vi av gradskäl att  $v/u \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $u$  drar mer än  $v$ ), och detta tillsammans med tabellen ovan ger figuren ovan till höger, där vi ser att  $\Delta_{L_R} \arg p(z) \rightarrow 2\pi$  då  $R \rightarrow \infty$ . Antalet nollställen i undre halvplanet blir därför  $(1/2\pi) \lim_{R \rightarrow \infty} (\Delta_{C_R^-} \arg p(z) - \Delta_{L_R} \arg p(z)) = (4\pi - 2\pi)/2\pi = 1$ , eftersom poler saknas. Svar: Ett.

- (b) Sätt  $f(z) = -8z$  och  $g(z) = z^4 - 3iz^2 + 3i$ . På hela cirkeln  $|z| = 1$  är  $|f(z)| = 8|z| = 8$  och  $|g(z)| \leq |z|^4 + 3|z|^2 + 3 = 7$ , så  $|g(z)| < |f(z)|$  på denna cirkel. Enligt Rouchés sats har därför  $p(z) = f(z) + g(z)$  lika många nollställen i  $|z| \leq 1$  som  $f(z)$ , d.v.s. ett. Svar: Ett.

4. (a) Att  $(-1, i, 1) \mapsto (0, i, \infty)$  ger med standardmetoder  $w(z) = (1+z)/(1-z)$ .

Vi undersöker först hur randen  $\partial\Omega$  avbildas.  $\hat{C}$ -cirklar avbildas på  $\hat{C}$ -cirklar under Möbius, och tre olika punkter i  $\hat{C}$  bestämmer en  $\hat{C}$ -cirkel entydigt. Eftersom  $(-1, i, 1) \mapsto (0, i, \infty)$  inser vi att enhetscirkeln  $|z| = 1$  avbildas på imaginäraxeln  $\text{Re } w = 0$ ; speciellt avbildas halvcirkeln

från  $z = -1$  via  $z = i$  till  $z = 1$  på strålen från  $w = 0$  via  $w = i$  till  $w = \infty$ , d.v.s. på positiva imaginäraxeln riktad uppåt (rita figurer i  $z$ -planet och  $w$ -planet!). Vidare, eftersom direkt insättning ger  $w(0) = 1$  inser vi också att  $(-1, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$ , så realaxeln avbildas på realaxeln; speciellt avbildas sträckan från  $z = -1$  via  $z = 0$  till  $z = 1$  på strålen från  $w = 0$  via  $w = 1$  till  $w = \infty$ , alltså på positiva realaxeln riktad högerut.

När vi genomlöper randen  $\partial\Omega$  i positiv led, d.v.s. så att vi har  $\Omega$  till vänster om oss när vi går runt  $\partial\Omega$ , och med början i  $z = 1$ , säg, går vi därför på andra sidan, i  $w$ -planet, från  $w = \infty$  längs positiva imaginäraxeln till  $w = 0$  och sedan vidare längs positiva realaxeln tillbaka till  $w = \infty$ ; området till vänster om denna kurva är första kvadranten  $\operatorname{Re} w > 0$ ,  $\operatorname{Im} w > 0$ , som därför är bilden av  $\Omega$  under  $w(z)$ , p.g.a. konformiteten.

Svar:  $w(z) = (1+z)/(1-z)$ ; bilden av  $\Omega$  är första kvadranten  $\operatorname{Re} w > 0$ ,  $\operatorname{Im} w > 0$ .

- (b) En harmonisk funktion  $T$  i första kvadranten  $\operatorname{Re} w > 0$ ,  $\operatorname{Im} w > 0$  sådan att  $T = 0$  på positiva realaxeln och  $T = 1$  på positiva imaginäraxeln är  $T = (2/\pi) \operatorname{Arg} w$ . Eftersom  $w(z)$  är analytisk i  $\Omega$  är därför  $T = (2/\pi) \operatorname{Arg} w(z)$  en harmonisk funktion i  $\Omega$  som har värdena  $T = 0$  på sträckan och  $T = 1$  på cirkelbågen. Svar:  $T = (2/\pi) \operatorname{Arg}((1+z)/(1-z))$ .

5. (a) Sätt  $w(z) = (z-i)/(z+i)$ . Då är  $w(z)$  Möbius, och har invers  $z(w) = i(1+w)/(1-w)$ . Funktionen  $f(z) = \operatorname{Log} w(z)$  är analytisk överallt utom där  $w(z) \in ]-\infty, 0] \cup \{\infty\}$ , negativa realaxeln inklusive  $\infty$ . Strålen från  $w = 0$  via  $w = -1$  till  $w = \infty \in \hat{\mathbf{C}}$  avbildas på sträckan från  $z = i$  via  $z = 0$  till  $z = -i$ , så  $\Omega = \mathbf{C} \setminus [-i, i]$ . Direkt derivering ger sedan

$$f'(z) = \frac{1}{w(z)} \cdot w'(z) = \frac{1}{(z-i)/(z+i)} \cdot \frac{1 \cdot (z+i) - 1 \cdot (z-i)}{(z+i)^2} = \frac{2i}{1+z^2}, \quad z \in \Omega.$$

- (b) Halvcirkeln  $C$  ligger helt i  $\Omega$  (rita figur!) och  $f$  är trivialt en primitiv till  $f'$  i  $\Omega$ , så

$$I_C = \int_C \frac{dz}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i} \int_C f'(z) dz = \frac{1}{2i} (f(2+i) - f(-2-i)) = \left[ \begin{array}{c} \text{fyll i} \\ \text{detaljer} \end{array} \right] = -\frac{\pi}{4} + i \frac{\ln 2}{2}.$$

Sträckan  $L$  ligger däremot inte i  $\Omega$ . Residysatsen ger emellertid

$$\int_{L-C} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi, \quad \text{så} \quad I_L = \int_L \frac{dz}{1+z^2} = \pi + I_C = \frac{3\pi}{4} + i \frac{\ln 2}{2}.$$

$$\text{Svar: (a) } \Omega = \mathbf{C} \setminus [-i, i] \text{ och } f'(z) = \frac{2i}{1+z^2}; \text{ (b) } I_C = -\frac{\pi}{4} + i \frac{\ln 2}{2} \text{ och } I_L = \frac{3\pi}{4} + i \frac{\ln 2}{2}.$$

6. Låt  $C_\rho$  vara cirkeln  $|z| = \rho$  tagen ett varv i positiv led. Eftersom  $f$  är analytisk i enhetsskivan  $|z| < 1$ , och  $|f(z)| \leq 1/(1-|z|)$  där, ges Maclaurinkoefficienterna  $c_0, c_1, c_2, \dots$  för  $f$  av

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(s)}{s^{n+1}} ds, \quad \text{med ML-uppskattning} \quad |c_n| \leq \frac{1}{\rho^n(1-\rho)}$$

närhelst  $n \in \mathbf{N}$  och  $0 < \rho < 1$ . Fixera  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  och sätt  $g(\rho) = \rho^n(1-\rho)$  för  $0 \leq \rho \leq 1$ . Då är  $g(0) = 0 = g(1)$ , och  $g'(\rho) = 0$  precis då  $\rho = n/(n+1)$ , som tillhör  $]0, 1[$ , så elementär envariabelanalys medför att  $g(n/(n+1)) = (n/(n+1))^n/(n+1) > 0$  är största värdet för  $g$ . Således blir den bästa uppskattningen (d.v.s. den med den minsta övre gränsen) av  $|c_n|$  följande:

$$|c_n| \leq (n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

och eftersom  $(1+1/n)^n$  har ett gränsvärde då  $n \rightarrow \infty$ , nämligen  $e$ , följer det att det finns någon konstant  $C$  sådan att  $(1+1/n)^n \leq C$  och därmed  $|c_n| \leq C(n+1)$  för  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Klart!

7. Antag att  $u$  är reell och harmonisk; då är  $u$  speciellt en  $\mathcal{C}^2$ -funktion, och  $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ . Sätt  $g = \alpha + i\beta = u'_x - iu'_y$ . Då är  $\alpha$  och  $\beta$  reella  $\mathcal{C}^1$ -funktioner,  $\alpha'_x = (u'_x)'_x = u''_{xx}$ ,  $\beta'_y = (-u'_y)'_y = -u''_{yy} = u''_{xx} = \alpha'_x$ , och  $\alpha'_y = (u'_x)'_y = u''_{xy}$ ,  $\beta'_x = (-u'_y)'_x = -u''_{yx} = -u''_{xy} = -\alpha'_y$ , så  $\alpha, \beta$  uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer och är  $\mathcal{C}^1$ , varför  $g \in \mathcal{A}(\Omega)$ . Men  $|\nabla u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} = |g|$ , så även  $|g|$  antar ett största värde någonstans i området  $\Omega$ , varför  $g$  är konstant enligt maximumprincipen. Det finns alltså reella konstanter  $A$  och  $B$  sådana att  $g = A - iB$ , d.v.s.  $u'_x = A$  och  $u'_y = B$ . Sätt  $\varphi = u - Ax - By$ . Då är  $\nabla\varphi = \mathbf{0}$  i  $\Omega$ , varför  $\varphi = C$  för någon reell konstant  $C$ .

Svar: Det finns reella konstanter  $A, B, C$  sådana att  $u(x, y) = Ax + By + C$  för alla  $(x, y) \in \Omega$ .

TATA45 Komplex analys 2018-01-10, kommentarer

1. I både (a) och (b) får man *mängder* av tal, och de kan beskrivas på lite olika sätt; exempelvis är  $e^{\pi/2+2n\pi}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , och  $e^{-3\pi/2-2n\pi}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , samma mängder av tal som  $e^{\pi/2-2n\pi}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

(a) Använd alltid definitionen av  $z^\alpha$ , d.v.s.  $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$ , utan några mellanled. Flera räknar nämligen som om räknelagen  $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$  vore sann för allmänna komplexa exponenter  $\alpha, \beta$  (FEL); exempelvis är  $(i^2)^{1/2} = (-1)^{1/2} = \pm i$  medan  $i^{2 \cdot 1/2} = i^1 = i$ .

Några tror att  $e^{2\pi n} = 1$  (FEL) eller  $e^{\pi/2} = i$  (FEL), förmodligen en sammanblandning med de korrekta likheterna  $e^{i2\pi n} = 1$  och  $e^{i\pi/2} = i$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ).

(b) Undvik att skriva  $\sqrt{-25/16}$ ; kvadratroten ur negativa tal har inte definierats i TATA45.

(c) Alternativt kan man skriva  $f(z) = z^{1/2} = \exp((\text{Log } z)/2)$  för grenen och direkt få  $f'(z) = (1/2) z^{-1/2} = (1/2) \exp(-(\text{Log } z)/2)$ ; observera att det är samma log-gren för både  $f$  och  $f'$ .

2. Det går också bra att integrera längs  $L_R + C_R^+$ , där  $C_R^+$  är halvcirkeln från  $z = R$  till  $z = -R$  i övre halvplanet. Då finns två enkelpoler,  $e^{i\pi/6}$  och  $e^{i5\pi/6}$ , innanför konturen när  $R > 1$ , och

$$\int_{L_R + C_R^+} f(z) dz = 2\pi i \left( \text{Res}_{z=e^{i\pi/6}} f(z) + \text{Res}_{z=e^{i5\pi/6}} f(z) \right) = 2\pi i \left( \frac{1 - i\sqrt{3}}{6} + \frac{1 + i\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{2\pi i}{3}$$

för dessa  $R$ ; även här lönar det sig att använda  $p/q$ -formeln för beräkning av residy i enkelpol, och dessutom är det i detta fall bra att behålla den polära formen på polerna ett tag.

Integralen  $J$  är tydligt positiv, så icke-reella värden eller reella värden  $\leq 0$  på  $J$  är orimliga.

Ett annat sätt att använda  $\text{Im } I$  för att härleda sambandet mellan  $I$  och  $J$  är att skriva så här:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + i}{x^6 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^6 + 1} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}, \text{ så } \text{Im } I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = 2J.$$

Förvånansvärt få utnyttjade ledningen. I stället beräknade de  $J$  *from scratch*, och trasslade då in sig i långa uträkningar, bl.a. med residyer i tre enkelpoler. Då är det lätt att göra något räknefel!

3. (a) Som vanligt räcker det att faktorisera endast en av  $u$  och  $v$  vid undersökningen på realaxeln, som i kompendiet. Om man endast faktorerar  $v$  får man följande tabell:

$x$	$-\infty$	$<$	$-1$	$<$	$1$	$<$	$+\infty$
$u$	$+$	$?$	$+$	$?$	$-$	$?$	$+$
$v$	$-$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$	$-$
kvadrant/halvplan	4	undre		övre		undre	4

Observera att  $\pm\infty$  (som representerar mycket stora positiva respektive negativa värden på  $x$ ) måste vara med i så fall.

Några skriver  $\Delta_{C_R^-} \arg(z^4 - 3iz^2 - 8z + 3i) = \Delta_{C_R^-} \arg z^4 + \Delta_{C_R^-} \arg(-3i/z^2 - 8/z^3 + 3i/z^4)$  (FEL); observera att 1 saknas som första term i sista parentes, och att, utan denna etta,  $\Delta_{C_R^-} \arg(-3i/z^2 - 8/z^3 + 3i/z^4) \rightarrow -2\pi \neq 0$  då  $R \rightarrow \infty$ .

(b) Uppskattningarna ska alltså ske på randen  $|z| = 1$  – hela randen! – och ingen annanstans, om man vill använda Rouchés sats. Det måste också framgå av lösningarna att det är just randen man undersöker.

Notera att Rouchés sats fungerar lika bra för den slutna skivan  $|z| \leq 1$  som för den öppna skivan  $|z| < 1$ , eftersom både  $f$  och  $f + g$  saknar nollställen på cirkeln  $|z| = 1$  om villkoret i satsen är uppfyllt, se kompendiet.

En provkarta på vanliga FEL:

- ”Då  $|z| = 1$  är  $|f(z)| \leq 8$  och  $|g(z)| \leq 7$ , och därmed är  $|f(z)| > |g(z)|$  där”. Att  $|f(z)| \leq 8$  och  $|g(z)| \leq 7$  då  $|z| = 1$  är i och för sig sant, men dessa uppskattningar medför inte att  $|f(z)| > |g(z)|$  då  $|z| = 1$  – t.ex. skulle det kunna vara så att  $|f(z_0)| = 4$  och  $|g(z_0)| = 5$  för någon punkt  $z_0$  på randen.

- ” $|g(z)| = |z|^4 + 3|z|^2 + 3 = 7$ ”. Här behöver det inte vara likhet, utan i stället måste man använda triangelolikheten.
  - ” $|f(1)| = 8$  och  $|g(1)| = |1 - 3i + 3i| = 1$ , alltså är  $|f(1)| > |g(1)|$ ”. I och för sig sant, men det räcker inte att kolla en enda punkt (här:  $z = 1$ ) på randen  $|z| = 1$ , som ju är en hel cirkel.
  - ”Alltså är  $|f(z)| > |g(z)|$  då  $|z| \leq 1$ , och därmed har  $p = f + g$  och  $f$  lika många nollställen i  $|z| \leq 1$ , d.v.s. ett”. Här består felet i ett enda tecken (den första förekomsten av ” $\leq$ ” ska ersättas med ” $=$ ”), men konsekvensen är desto större, eftersom  $f(z) + g(z)$  inte kan vara noll över huvud taget i skivan  $|z| \leq 1$  om  $|f(z)| > |g(z)|$  i hela denna skiva; summan av två olika långa komplexa tal kan ju aldrig bli noll.
4. (a) Alternativt kan man bestämma bilden  $w(\Omega)$  i  $w$ -planet av  $\Omega$  i  $z$ -planet på följande vis: Låt  $\Omega_1$  vara hela cirkelskivan  $|z| < 1$  och  $\Omega_2$  hela övre halvplanet  $\text{Im } z > 0$ ; då är  $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ , och eftersom  $w(z)$  är injektiv är  $w(\Omega) = w(\Omega_1) \cap w(\Omega_2)$ .  $(-1, i, 1) \mapsto (0, i, \infty)$ , så cirkeln  $|z| = 1$  avbildas på imaginäraxeln, och inre punkten  $z = 0 \in \Omega_1$  (t.ex.) avbildas på  $w = 1$ , så  $w(\Omega_1)$  är högra halvplanet  $\text{Re } w > 0$ .  $(-1, 0, 1) \mapsto (0, 1, \infty)$ , så realaxeln avbildas på realaxeln, och inre punkten  $z = i \in \Omega_2$  (t.ex.) avbildas på  $w = i$ , så  $w(\Omega_2)$  är övre halvplanet  $\text{Im } w > 0$ . Alltså är  $w(\Omega)$  första kvadranten  $\text{Re } w > 0, \text{Im } w > 0$ .
- Bilden  $w(\Omega)$  i  $w$ -planet blir ett *område* – flera tror att bilden bara blir en *kurva* (FEL).
- (b) Uppgiften måste tolkas så att  $T = 0$  i alla punkter  $z = x, -1 < x < 1$ , och  $T = 1$  i alla punkter  $z = e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi$ ; vi tilldelar alltså inte  $T$  något värde i hörnpunkterna  $z = \pm 1$ .
5. Funktionen  $f(z) = \text{Log}((z-i)/(z+i))$  är visserligen *definierad* för alla  $z \in \mathbf{C} \setminus \{\pm i\}$ , men den är inte *analytisk* i hela detta område eftersom vi dessutom måste kräva att  $(z-i)/(z+i) \notin ]-\infty, 0[$ , vilket visar sig betyda att  $\Omega$  är komplexa planet  $\mathbf{C}$  med sträckan från  $-i$  till  $i$  borttagen:  $\Omega = \mathbf{C} \setminus [-i, i]$ , se lösningsskissen.

Några delar upp logaritmen:  $\text{Log}((z-i)/(z+i)) = \text{Log}(z-i) - \text{Log}(z+i)$  (GÄLLER EJ I HELA  $\Omega$ ). Speciellt är vänsterledet analytiskt i  $\Omega$  medan högerledet är analytiskt i  $\mathbf{C}$  med de två strålarna från  $\pm i$  riktade rakt vänsterut borttagna. Se även exempel i kapitel 2 i kompendiet.

Ett vanligt misstag är att tro att  $I_C = I_L$  (FEL). Med enkel residykalkyl inser man alltså att  $I_L - I_C = \pi$ , se lösningsskissen.

Några försöker använda uttryck som  $\arctan z$  (ej definierat i TATA45), men i så fall måste man vara mycket försiktig och definiera lämpliga grenar till denna, som det visar sig, flervärda funktion; sådant görs i TATA78, jfr kapitel 8 i kompendiet. Alternativt kan man beräkna integralerna genom direkt partialbråksuppdelning,

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i},$$

och val av lämpliga primitiver till  $1/(z+i)$  och  $1/(z-i)$ , alltså lämpliga grenar  $g(z)$  och  $h(z)$  till  $\log(z+i)$  respektive  $\log(z-i)$ ; dessa val blir olika för  $I_C$  och  $I_L$  eftersom vi måste klippa upp planet åt olika håll från  $\pm i$  i de båda fallen, med hänsyn tagen till hur kurvorna  $C$  och  $L$  ligger.

6. Inget att kommentera.
7. I specialfallet att det finns en funktion  $f \in \mathcal{A}(\Omega)$  sådan att  $\text{Re } f = u$  blir beviset mycket kortare; detta gäller med säkerhet om  $\Omega$  är enkelt sammanhängande. I så fall är  $f' = u'_x + iv'_x = u'_x - iw'_y$  varför  $|f'| = |\nabla u|$ , så  $|f'|$  antar ett största värde någonstans i  $\Omega$ , enligt förutsättningen. Eftersom  $f' \in \mathcal{A}(\Omega)$  medför därför maximumprincipen att  $f'(z) = C$  och därmed att  $f(z) = Cz + D$  för några konstanter  $C, D \in \mathbf{C}$ , ty  $\Omega$  är ett område. Slutligen blir  $u = \text{Re } f = (\text{Re } C)x - (\text{Im } C)y + (\text{Re } D)$ . Maximumprincipen i TATA45 handlar om *analytiska* funktioner, inte om *harmoniska* funktioner. Hänvisning till maximumprinciper för harmoniska funktioner duger alltså inte som bevis här.