KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN1212,.... DN1243 Tentamen i Numeriska metoder , Lördag 10-10-23

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

1. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x(y-2), \qquad y(0) = 10; \quad y(8) = 3$$

(2p) diskretiseras med steget $h = 1$. Då erhålls ett ekvationssystem. Hur många ekvationer n har detta system om $y(0)$ och $y(8)$ eliminerats med hjälp av randvillkoren? n är ...

☐ 2

☐ 3.

☐ 5.

☐ 7.

☐ 8.

☐ det är omöjligt att säga

2. Använd minstakvadratmetoden för att till givna mätdata

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

anpassa modellen

$$P(x) = c_1 + c_2(x - 103) + c_3[(x - 103)^2 - 2]$$

(3p) Koefficienten c_3 blir

a.

☐ -2

☐ -1

☐ -0.5

☐ 0

☐ 0.5

☐ 1

☐ 2

☐ 103

(1p) b.Givet ett överbestämt linjärt ekvationssystem där koefficientmatrisen är en 5×3-matris. Vilket av följande påståenden är **inte** korrekt

☐ residualvektorn har 5 komponenter

☐ residualvektorns Euklidiska norm är alltid noll

☐ residualvektorns Euklidiska norm minimeras alltid

☐ normalekvationernas koefficientmatris är en 3×3-matris

☐ normalekvationerna har tre obekanta

☐ det överbestämda ekvationssystemet har fem ekvationer

(1p) **3.** a.Ett steg med Eulers metod med steglängden $h = 0.25$ på

$$\begin{aligned} x' &= 2xy \qquad & x(0) = 1 \\ y' &= 8t - 2xy \qquad & y(0) = 4 \end{aligned}$$

ger bl.a. följande resultat (ett alternativ korrekt)

☐ $y(0.25) = 1$	☐ $x(0.25) = 0.75$
☐ $y(0.50) = 3$	☐ $x(0.25) = 1$
☐ $y(0.25) = 2$	☐ $x(0.50) = 2$
☐ $y(1.00) = 3$	☐ $x(1.00) = 103$

(2p) b.Ytterligare ett steg med Euler med samma steglängd ger (ett alternativ korrekt)

☐ $x(0.25) = 1$	☐ $x(0.25) = 0.75$
☐ $x(0.50) = 6$	☐ $x(0.50) = 1$
☐ $x(0.75) = 0.25$	☐ $x(0.50) = 2$
☐ $x(1.00) = 3$	☐ $x(1.00) = 103$

(2p) **4.** En metod för lösning av icke-linjära ekvationer

$$x_{k+1} = x_k + dx_k$$

ger en följd av korrektionstermer dx_k enligt

$$0.4, \quad 0.04, \quad 0.004, \quad 0.0004, \quad 0.00004$$

Detta indikerar att metoden

- ☐ divergerar
- ☐ är linjärt konvergent
- ☐ är bättre än linjärt konvergent
- ☐ är kvadratiskt konvergent
- ☐ är Newtons metod
- ☐ är Runge-Kuttas metod

(2p) **5.** Givet ekvationen

$$x^2 + e^{x-100} = 2500$$

En approximativ lösning är $x = 50$. Gör en iteration med Newtons metod för att skatta felet i denna lösning. $e^{-25} \approx 1.4 \times 10^{-11}$, $e^{-50} \approx 2 \times 10^{-22}$ och $e^{-100} \approx 4 \times 10^{-44}$. Felet är ungefär

☐ 0.5	☐ 2×10^{-28}
☐ 2×10^{-11}	☐ 2×10^{-44}
☐ 2×10^{-22}	☐ 2×10^{-46}
☐ 2×10^{-24}	☐ 4×10^{-88}

6. Givet tabellen

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

(1p) a. Det interpolationspolynom som går genom samtliga punkterna i tabellen har gradtalet

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

(1p) b. Om vi interpolerar linjärt till $x = 104.3$ så får vi

☐ 3.0

☐ 3.3

☐ 3.6

☐ 3.9

7. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^3q}{dt^3} + 3\frac{dq}{dt}q^2 = \sin(t)$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir n...

☐ det är omöjligt att säga

☐ 1.

☐ 2.

☐ 3.

☐ 4.

8. En integral $I = \int_0^4 f(x)dx$ har beräknats approximativt med trapetsregeln T(h) med steglängderna $h = 0.1$, $h = 0.05$ och $h = 0.01$. Följande resultat erhölls $T(0.1) = 2.850216$, $T(0.05) = 2.761023$, $T(0.01) = 2.731224$.

(1p) a. Felet i T(0.1) är ungefär

☐ det är omöjligt att säga

☐ 1

☐ 0.1

☐ 0.01

☐ 0.0001

(2p) **8b.** Heuns metod för numerisk lösning av differentialekvationer har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att ...

☐ Felet avtar med antalet steg

☐ Antalet korrekta decimaler kvadreras

☐ Felet är proportionellt mot steglängden

☐ Det globala felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat

KTH-CSC

DN12- 12,14,15,40,41,43 Tentamen i Numeriska metoder gk

Lördag 10-10-23

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40 A.

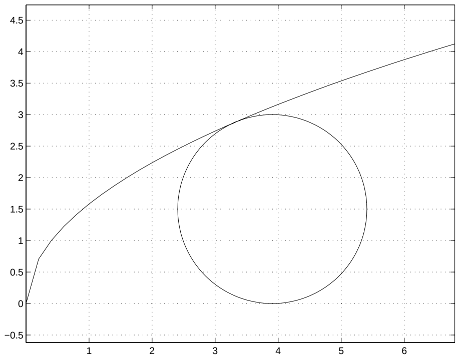
(12) **P1.** Följande icke-linjära ekvationssystem bestämmer centrumpunkten $(x_c, 2)$ och tangeringspunkten (x_p, y_p) för en cirkel med radien 2, som tangerar både x-axeln, och parabeln $x = 0.4y^2$.

$$(x_p - x_c)^2 + (y_p - 2)^2 = 4$$

$$x_p = 0.4y_p^2$$

$$2(x_p - x_c) + 2(y_p - 2)\frac{1}{0.8y_p} = 0$$

Formulera en algoritm i Matlab för att lösa problemet. Bifogad matlabrutin `minjac` får gärna användas. Goda startgissningar skall anges och redovisas. Då cirkeln bestämts skall den ritas upp tillsammans med överdelen av parabeln, se figuren (för annan, mindre cikel). Då cirkeln ritas är det lämpligt att använda polär form.



P2. Derivatan av funktionen $f(x)$ i punkten $x = 1.2$ har beräknats approximativt med en differensmetod med olika steglängder h. Följande resultat erhölls.

h	approx.
5.00e-02	2.0717
2.50e-02	2.0209
1.25e-02	2.0084
6.25e-03	2.0053

(6) **P2a.** Man kan gissa att metodens noggrannhetsordning är två. Använd detta till att från tabellen bestämma **en** bättre approximation till derivatavärdet, samt skatta felet i detta värde.

(6) **P2b.** Använd tabellvärdena till att visa att metoden verkligen har noggrannhetsordning två.

VÄND!

(11) **P3.** Givet differentialekvationsproblemet

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} (1-y^2)y, & -2 \le y \le 2 \\ -6 & y > 2 \\ 6 & y < -2 \end{cases}$$

Skriv ett Matlabprogram som löser ovanstående problem och ritar upp flera olika lösningsbanor i samma figur. Följande startvärden skall användas.

1.$y(0) = 0.5$ 2.$y(0) = 5$ 3.$y(0) = -0.5$ 4.$y(0) = -5$

Beräkna och skriv också ut $y_1(10) - y_2(10)$ och $y_3(10) - y_4(10)$ Här står index i i $y_i(10)$ för lösningen svarande mot startvärde nr i. Hur gör du för att bedöma resultatets noggranhet?

(7)**P4.a** Problemet nedan diskretiseras med steglängden $h = 0.25$ och centraldifferensapproximationer till derivatorna.

$$(1 + (\frac{dz}{dt})^2)\frac{d^2z}{dt^2} = z, \qquad z(0) = 1, \quad z(2) = 2$$

Diskretisera intervallet (hur många inre punkter blir det?) och inför lämpliga beteckningar samt formulera det icke-linjära ekvationssystem $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$ som erhålls.

(8)**P4.b** Skriv ett Matlabprogram som för steglängd $h = 2/(N+1)$, med valfritt N, formulerar och löser det ickelinjära ekvationssystemet med Newtons metod. Bifogad rutin `minjac` får användas. Skriv ut mellanresultat så iterationernas konvergens kan studeras och diskutera förväntade utskrifter. Beskriv hur du gör för att bedöma diskretiseringsfelet i lösningen?

Användbara Matlabrutiner:

```
---------------------------------------------------------
ODE45  Solve non-stiff differential equations, medium order method.
    [TOUT,YOUT] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0) with TSPAN = [T0 TFINAL] integrates
    the system of differential equations y' = f(t,y) from time T0 to TFINAL
    with initial conditions Y0. ODEFUN is a function handle. For a scalar T
    and a vector Y, ODEFUN(T,Y) must return a column vector corresponding
    to f(t,y). Each row in the solution array YOUT corresponds to a time
    returned in the column vector TOUT.

---------------------------------------------------------------
function jac=minjac(Fcn,z);
%beräknar en numerisk approximation jac till jakobianmatrisen till
%funktionen Fcn i punkten z
  N=length(z); F=feval(Fcn,z); jac=[]; stegtol=1.E-8;
  for i=1:N,
   z0=z;
   st=z0(i)*stegtol; if st==0, st=1.E-10; end
   z0(i)=z0(i)+st;
   jac=[jac ( feval(Fcn,z0)-F )/st];
  end
---------------------------------------------------------------
```

KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

DN1212,.... DN1243 Tentamen i Numeriska metoder , Lördag 10-10-23

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

1. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x(y-2), \qquad y(0) = 10; \quad y(8) = 3$$

(2p) diskretiseras med steget $h = 1$. Då erhålls ett ekvationssystem. Hur många ekvationer n har detta system om $y(0)$ och $y(8)$ eliminerats med hjälp av randvillkoren? n är . . .

- [ ] 2
- [ ] 3.
- [ ] 5.
- [x] 7.
- [ ] 8.
- [ ] det är omöjligt att säga

2. Använd minstakvadratmetoden för att till givna mätdata

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

anpassa modellen

$$P(x) = c_1 + c_2(x-103) + c_3[(x-103)^2 - 2]$$

(3p) Koefficienten c_3 blir

a.

- [ ] -2
- [ ] -1
- [x] -0.5
- [ ] 0
- [ ] 0.5
- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] 103

(1p) b.Givet ett överbestämt linjärt ekvationssystem där koefficientmatrisen är en 5×3-matris. Vilket av följande påståenden är **inte** korrekt

- [ ] residualvektorn har 5 komponenter
- [x] residualvektorns Euklidiska norm är alltid noll
- [ ] residualvektorns Euklidiska norm minimeras alltid
- [ ] normalekvationernas koefficientmatris är en 3×3-matris
- [ ] normalekvationerna har tre obekanta
- [ ] det överbestämda ekvationssystemet har fem ekvationer

(1p) **3.** a.Ett steg med Eulers metod med steglängden $h = 0.25$ på

$$\begin{aligned} x' &= 2xy & x(0) &= 1 \\ y' &= 8t - 2xy & y(0) &= 4 \end{aligned}$$

ger bl.a. följande resultat (ett alternativ korrekt)

☐ $y(0.25) = 1$	☐ $x(0.25) = 0.75$
☐ $y(0.50) = 3$	☐ $x(0.25) = 1$
☒ $y(0.25) = 2$	☐ $x(0.50) = 2$
☐ $y(1.00) = 3$	☐ $x(1.00) = 103$

(2p) b.Ytterligare ett steg med Euler med samma steglängd ger (ett alternativ korrekt)

☐ $x(0.25) = 1$	☐ $x(0.25) = 0.75$
☒ $x(0.50) = 6$	☐ $x(0.50) = 1$
☐ $x(0.75) = 0.25$	☐ $x(0.50) = 2$
☐ $x(1.00) = 3$	☐ $x(1.00) = 103$

(2p) **4.** En metod för lösning av icke-linjära ekvationer

$$x_{k+1} = x_k + dx_k$$

ger en följd av korrektionstermer dx_k enligt

$$0.4, \quad 0.04, \quad 0.004, \quad 0.0004, \quad 0.00004$$

Detta indikerar att metoden

- ☐ divergerar
- ☒ är linjärt konvergent
- ☐ är bättre än linjärt konvergent
- ☐ är kvadratiskt konvergent
- ☐ är Newtons metod
- ☐ är Runge-Kuttas metod

(2p) **5.** Givet ekvationen

$$x^2 + e^{x-100} = 2500$$

En approximativ lösning är $x = 50$. Gör en iteration med Newtons metod för att skatta felet i denna lösning. $e^{-25} \approx 1.4 \times 10^{-11}$, $e^{-50} \approx 2 \times 10^{-22}$ och $e^{-100} \approx 4 \times 10^{-44}$. Felet är ungefär

☐ 0.5	☐ 2×10^{-28}
☐ 2×10^{-11}	☐ 2×10^{-44}
☐ 2×10^{-22}	☐ 2×10^{-46}
☒ 2×10^{-24}	☐ 4×10^{-88}

6. Givet tabellen

x	101	102	103	104	105
y	-4	0	3	3	5

(1p) a. Det interpolationspolynom som går genom samtliga punkterna i tabellen har gradtalet

- [ ] 2
- [ ] 3
- [x] 4
- [ ] 5

(1p) b. Om vi interpolerar linjärt till $x = 104.3$ så får vi

- [ ] 3.0
- [ ] 3.3
- [x] 3.6
- [ ] 3.9

7. Differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^3q}{dt^3} + 3\frac{dq}{dt}q^2 = \sin(t)$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir n...

- [ ] det är omöjligt att säga
- [ ] 1.
- [ ] 2.
- [x] 3.
- [ ] 4.

8. En integral $I = \int_0^4 f(x)dx$ har beräknats approximativt med trapetsregeln T(h) med steglängderna $h = 0.1$, $h = 0.05$ och $h = 0.01$. Följande resultat erhölls $T(0.1) = 2.850216$, $T(0.05) = 2.761023$, $T(0.01) = 2.731224$.

(1p) a. Felet i T(0.1) är ungefär

- [ ] det är omöjligt att säga
- [ ] 1
- [x] 0.1
- [ ] 0.01
- [ ] 0.0001

8b. Heuns metod för numerisk lösning av differentialekvationer har noggrannhetsordning 2.
(2p) Detta betyder att ...

- [ ] Felet avtar med antalet steg
- [ ] Antalet korrekta decimaler kvadreras
- [ ] Felet är proportionellt mot steglängden
- [x] Det globala felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat

CSC, NADA, KTH

Lösning till DN1241/43 Numeriska Metoder grundkurser
Lördagen den 23/10 2010 kl 9-12

P1.
```
function f=fp1(z);
xc=z(1); xp=z(2); yp=z(3);
f=[(xp-xc)^2+(yp-2)^2-4
     xp-0.4*yp^2
   2*(xp-xc)+2*(yp-2)/(0.8*yp)];
```
———————————————-

```
z=[8;7;4]; %ur figuren
dznorm=1;
while dznorm > 1.E-6,
    f=fp1(z); J=minjac(@fp1,z);
    dz=-J\f; z=z+dz; dznorm=norm(dz)
end
xc=z(1); yc=2; R=2; fi=0:pi/25:2*pi;
x=xc+R*cos(fi); y=yc+R*sin(fi);
xpar=0:0.1:10; ypar=sqrt(xpar/0.4);
plot(x,y,xpar,ypar,z(2),z(3),'x');
axis equal
```

P2a. Från de tre sista värdena får vi

```
     h       approx.            extrapolerat
--------------------
 2.50e-02    2.0209
 1.25e-02    2.0084  125/3= 42    2.0042
 6.25e-03    2.0053   31/3= 10    2.0043
```

Vilket ger f'(1.2)=2.0043 med felskattning 0.0001 (skillnaden mellan de exrapolerade värdena)

P2b. Vi noterar att

$$D(h) = f'(1.2) + ch^p + \dots$$

Vi utökar tabellen ovan enligt

```
  h     approx. [D(h)-D(h/2)]x10^4      kvot
------------------------------------------
 8H    2.0717
 4H    2.0209     508                   508/125 = ca 4
 2H    2.0084     125                   125/31  = ca 4
  H    2.0053      31
```

Kvoten består av uttrycket

$$\frac{h^p - (h/2)^p}{(h/2)^p - (h/4)^p} = 2^p$$

I vårt fall blir kvoten 4 så p=2.

P3
```
function f=hl(t,y);
f=(1-y^2)*y;
if y<-2, f=6; elseif y>2, f=-6; end

-------------------------------------------------------
ystart=[0.5 5 -0.5 -5]; yslut=[];
hold off
for y0=ystart
  [T,Y]=ode45(@hl,[0 10],y0);
  yslut=[yslut Y(end)];
  plot(T,Y), hold on
end
[yslut(1)-yslut(2) yslut(3)-yslut(4)]
```

P4a. För $h = 1$ får vi följande diskretisering av området

```
0    0.25             1                       2   :t
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
t     t     t     t     t                 t     t
 0     1     2     3     4                 7     8

y     y     y     y     y       osv
 0     1     2     3     4
```

Antalet inre punkter är alltså 7, liksom antalet obekanta. $y_0 = 1$ och $y_8 = 2$.

I differentialekvationen diskretiserar vi dz/dt och d^2z/dt^2 med centraldifferenser och kan ställa upp approximationer i de 7 inre punkterna. Detta ger

$$f_i(\mathbf{y}) = (1 + (\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h})^2)\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i = 0$$

för $i = 1, \ldots, 7$.

Detta är ett icke-linjärt ekvationssystem med 7 ekvationer och 7 obekanta.

P4b.
```
function f=fp4(z);
global zL zR h
y=[zL; z; zR]; N=length(y);
f=(1+(y(3:N)-y(1:N-2)).^2/(2*h)^2).*   ...
    (y(3:N)-2*y(2:N-1)+y(1:N-2))/(h^2)-y(2:N-1);
-------------------------------------------------
global zL zR h

N=19; h=2/(N+1)
zL=1; zR=2;
t=(h:h:2-h)';
z=1+t/2; %en rät linje mellan ändpunkterna

dznorm=1;
while dznorm > 1.E-8,
    f=fp4(z); J=minjac(@fp4,z);
    dz=-J\f; z=z+dz; dznorm=norm(dz)
end
tp=[0;t;2]; zp=[zL; z; zR];
plot(tp,zp)
```

Vi kontrollerar konvergensen i Newton med utskrifterna av dznorm. Värdena skall avta kvadratiskt.

För att uppskatta diskretiseringsfelen löser vi om problemet med N=39 (halverad steglängd) och tittar på skillnaden i gemensamma punkter.