KTH-Matematik
Tentamenskrivning, 2009-06-03, kl. 08.00-13.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1och CMIEL1 samt CSAMH1 (7,5hp)
Göran och Karim

Preliminära gränser. Registrerade på kursen SF1624 får graderat betyg enligt skalan A (högsta betyg), B, C, D, E (lägsta godkända betyg), F (underkänt). Betygsgränserna är
26-28p för betyg A;23-25p för betyg B;20-22p för betyg C;17-19p för betyg D;14-16p för betyg E.
Den som fick 13p får tillfälligt betyg Fx som kan kompletteras till betyg E. Om kompletteringen misslyckas förvandlas betyget Fx till F. Kontakta i så fall läraren!
De som är redan registrerade på 5B1146 får betyg 5, 4, 3,K, U enligt det gamla systemet. Betygsgränserna då är
26p för betyg 5;22p för betyg 4;14p för betyg 3. Den som fick 13p får tillfälligt att kompletteras till betyg 3

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningsförslaget skall textförklaras. Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (Kladdpaper skall inte lämnas in.)
Inga hjälpmedel!
Den som blivit godkänd på KS X, 1<X<4 hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X, så skall motsvarande tal X inte räknas om.

3-poängsuppgifter

1. (För alla program utom CSAMH1)
Givet är punkterna O, A och B. På sträckan AB ligger punkten C fyra gånger så långt från B som från A. Bestäm talen α, β så att $\overrightarrow{OC} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$

1. (Endast för CSAMH1)
Visa med hjälp av den matematiska induktionen att för alla heltal $n \geq 1$ gäller likheten

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

2. (För alla program utom CSAMH1)

Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \end{cases}$.

2. (Endast för CSAMH1)

Givet är punkterna O, A och B. På sträckan AB ligger punkten C fyra gånger så långt från B som från A. Bestäm talen α, β så att $\overrightarrow{OC} = \alpha \cdot \overrightarrow{OA} + \beta \cdot \overrightarrow{OB}$.

3. a) Undersök om vektorn $(5,1,5,7)^t$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1,2,1,2)^t$ och $(1,-1,1,1)^t$.
b) Är vektorerna $(1,2,1,2)^t$, $(1,-1,1,1)^t$ och $(5,1,5,7)^t$ linjärt oberoende?

4. Visa att ekvationen $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$ i xy–planet beskriver en ellips.
Bestäm dess axelriktningar.

Var god vänd

4-poängsuppgifter

5. Bestäm det komplexa talet a så att ekvationen
$z^3 + (2 - \mathrm{i})\, z^2 + (1 - 10\mathrm{i})\, z + a = 0$ får roten $z = \mathrm{i}$.
Lös med det funna a ekvationen fullständigt.

6. Lös ekvationen $B^{-1}XA = -B^{-1}X + 2I$
där $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Givet är punkten $P = (1,0,-2)$ och planet $x - y + 2z - 3 = 0$. Låt O vara origo och Q vara den punkt i detta plan som är närmast P . Bestäm arean av triangeln OPQ.

8. Matrisen A har egenvärdena 0,1 och 2. Visa att matrisen $A+I$ är inverterbar.

Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2009-06-03, kl. 08.00-13.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1och CMIEL1 samt CSAMH1 (7,5hp)
Göran och Karim

1. (=2. för CSMAH1) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{4}{5},\beta=\frac{1}{5}.$$

1.(Endast för CSAMH1).
Bevis
Bassteg Kolla att påstående är sant för $n=1$. Vi har

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)=1^2 \Leftrightarrow 2\cdot 1-1=1 \quad \text{. Alltså sant}$$

Induktionssteg. Vi antar att påstående är sant för $n=p$ dvs $\sum_{k=1}^{p}(2k-1)=p^2$.

Vi vill visa att det måsta vara sant för $n=p+1$,dvs $\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1)=(p+1)^2$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1)=\sum_{k=1}^{p}(2k-1)+(2(p+1)-1)=p^2+(2(p+1)-1)=p^2+2p+2-1=(p+1)^2$$

Eftersom vi har visat att påståendet gäller för bassteget *n=1* samt att antagandet att påståendet gäller för *n=p* medför att det också gäller för *n=p+1*, följer det från **induktionsprincipen** att påståendet gäller för varje heltal *n=1,2,3,...*

2. (Ej för CSAMH1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&5&6&1\\2&3&2&3\\3&5&4&4\end{array}\right)_{r3-r2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}2&5&6&1\\2&3&2&3\\1&2&2&1\end{array}\right)^{r1-2r3} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&-1\\2&3&2&3\\1&2&2&1\end{array}\right) r2-2r3 \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&-1\\0&-1&-2&1\\1&2&2&1\end{array}\right)^{r1\times r3} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&1\\0&-1&-2&1\\0&1&2&-1\end{array}\right) r2+r3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&1\\0&0&0&0\\0&1&2&-1\end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&1\\0&1&2&-1\end{array}\right)^{r1-2r2} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&3\\0&1&2&-1\end{array}\right) \Leftrightarrow z=t,\ y=-1-2t,\ x=3+2t$$

$\boxed{\textbf{Svar: } x=3+2t,\ y=-1-2t,\ z=t.}$

---

3. a) Vi undersöker om det finns konstanter a och b sådana att $a\boldsymbol{v}+b\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}$.

$a(1,-1,1,1)+b(1,2,1,2)=(5,1,5,7) \Leftrightarrow (a+b,-a+2b,a+b,a+2b)=(5,1,5,7) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}a+\ \ b=5 & \\ -a+2b=1 & e2+e1\\ a+\ \ b=5 & e3-e1\\ a+2b=7 & e4-e1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+\ \ b=5\\ 3b=6\\ 0=0\\ b=2\end{cases} \Leftrightarrow a=3,\ b=2.$$

$\boxed{\textbf{Svar}\text{: ja.}}$

b) Enligt a) kan de två vektorer skrivas som en linjärkombination av den tredje. Detta innebär att de tre vektorer är linjärberoende, dvs svaret är Nej

---

4. Ekvationen kan skrivas på formen

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}^t A\vec{x} = 1$$

där $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Den karakteristiska ekvationen $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$

dvs $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ ger två positiva egenvärden $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 6$ vilket medför att ekvationen beskriver en ellips.

Axelriktningar = riktningar hos A:s egenvektorer. Dessa fås ur ($A - \lambda I$)v = 0.

För $\lambda_2 = 6$ har vi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v1 \\ v2 \end{bmatrix} = 0$ och en lösning är tex $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

För $\lambda_1 = 1$ får man tex $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Genom en vridning kan ellipsen överföras på en ellips med ekvationen $x^2 + 6y^2 = 1$ vars halvaxellängder är 1och $1/\sqrt{6}$.

5. $z = i$ är en rot till ekvationen ger $i^3 + (2 - i)i^2 + (1 - 10i)i + a = 0 \Rightarrow a = -8 - i$.
Divisionen av $z^3 + (2 - i)z^2 + (1 - 10i)z - 8 - i$ med $z - i$ ger $z^2 + 2z + 1 - 8i$. Återstår att lösa ekvationen $z^2 + 2z + 1 - 8i = 0 \Leftrightarrow (z + 1)^2 = 8i$. Sätt $z + 1 = x + yi$.
Man får:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 8i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x = \pm y \\ 2xy = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \text{ och } x = y \text{ som ger } x = y = \pm 2$$

$\boxed{\textbf{Svar: } i, -3-2i, 1+2i.}$

6. $B^{-1}XA = -B^{-1}X + 2I \Leftrightarrow B^{-1}X(A+I) = 2I \Leftrightarrow B^{-1}X = 2(A+I)^{-1}$

$$\Leftrightarrow X = 2B(A+I)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} =$$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Svar: $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

7. En punkt i planet är t ex $P_0 = (3,0,0)$. Då är $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Med $\vec{n}$ som normalvektor till det givna planet så ger det projektionsformeln då att

$$\overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{P_0P} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \text{ Alltså är } \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den sökta triangelns area blir därför

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

8. Eftersom *A har 3* skilda egenvärden, är *A diagonaliserbar* och kan skrivas

$A = PDP^{-1}$ där $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Då är

$$A + I = PDP^{-1} + PP^{-1} = P\left(D+I\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\det\left(A+I\right) = \det\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}\right) = \det\left(PP^{-1}\right)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 6 \neq 0$$

Detta betyder att *A+I* är inverterbar.