LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FUNKTIONSTEORI
2014-08-27 kl 8-13

HJÄLPMEDEL: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n$$

med begynnelsevillkoren $x_0 = 1,\ x_1 = 0.$

2. Bestäm den positiva konstanten b så att funktionen

$$u(x, y) = x^2 - y^b$$

blir realdelen till en analytisk funktion i hela komplexa planet. Ange också för den konstant b alla sådana analytiska funktioner $f(z)$, där $z = x + yi$.

3. Funktionen f är 2π-periodisk och uppfyller att $f(t) = t$, om $-\pi < t \leq \pi$.

a) Skissera grafen till funktionen f på intervallet $-3\pi \leq t \leq 3\pi$. (0.1)

b) Bestäm den trigonometriska Fourierserien för funktionen f. (0.2)

c) Är Fourierserien punktvis konvergent på intervallet $-\infty < t < \infty$? Motivera noggrant! (0.2)

d) Är Fourierserien likformigt konvergent på intervallet $-\infty < t < \infty$? Motivera noggrant! (0.2)

e) Utnyttja resultatet i b) för att beräkna värdet av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (0.3)$$

4. Vilka av följande serier är konvergenta respektive divergenta? Motivera noggrant! (5×0.2)

$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \qquad b)\quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{k!}\right) \qquad c)\quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(\frac{1}{k!}\right)$

$d)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^k} \qquad e)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+i)^k}$

VAR GOD VÄND!

5. Låt

$$f(z) = \frac{1}{e^z + e^i}.$$

a) Bestäm alla poler till funktionen $f(z)$. Svara på formen $a + bi$. (0.3)

b) Funktionen $f(z)$ kan utvecklas i en potensserie kring origo. Vad är potensseriens konvergensradie? (0.2)

c) Beräkna integralen

$$\int_\gamma f(z)dz$$

där γ är den positivt orienterade cirkeln $|z| = 10$. Svara på formen $a + bi$. (0.5)

6. Beräkna med residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1 + x^2)^2}\, dx.$$

LYCKA TILL!

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

SVAR OCH ANVISNINGAR
FUNKTIONSTEORI
2014-08-27 kl 8-13

1. $x_n = 1 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

2. $b = 2$ och $f(z) = z^2 + C\,i$, där C är ett godtyckligt reellt tal.

3. **a)** Grafen till $f(t) = t$ för $-\pi < t \leq \pi$ är en sträcka genom origo. Rita grafen till $f(t)$ i de tre perioderna.

b) Den trigonometriska Fourierserien är $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin kt.$

c) Fourierserien är punktvis konvergent på intervallet $-\infty < t < \infty$, enligt sats 7.18 i läroboken.

d) Fourierserien är inte likformigt konvergent på intervallet $-\infty < t < \infty$, ty enligt sats 7.18 vet vi att summan av Fourierserien inte är kontinuerlig på $-\infty < t < \infty$.

e) Med hjälp av Parsevals formel får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. **a)** konvergent, **b)** konvergent, **c)** divergent, **d)** konvergent, **e)** konvergent

5. **a)** Poler till funktionen $f(z)$: $(1 + \pi + 2k\pi)i$, där $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

b) Potensseriens konvergensradie är lika med avståndet från origo till närmaste pol och alltså är $\pi - 1$.

c) Det finns tre poler $1 + \pi,\ 1 - \pi,\ 1 - 3\pi$ inom området $|z| < 10$. Residysatsen medför

$$\int_\gamma f(z)dz = -6\pi\left(\sin 1 + i\cos 1\right).$$

6. Med hjälp av samma kontur och samma lösningsmetod som Exempel 10.16 i läroboken kan man få likheten

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i\left(Res_{z=i}\left(\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(1+z^2)^2}\right) + Res_{z=-i}\left(\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(1+z^2)^2}\right)\right),$$

som medför att

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$