LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2016–10–27 kl 8 – 13

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad.
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Låt talföljden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defineras genom

$$a_{n+2} - a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \qquad a_0 = 17, a_1 = 5.$$

a) Bestäm lösningen till rekursionsekvationen. (0.7)
b) Beräkna $\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$. (0.3)

2. a) Hitta det största område i vilket funktionen $f(z) = \mathrm{Log}\,(z - 2 - 4i)$ är holomorf (Log betyder principalgrenen). (0.4)

b) Låt $u(x, y)$ och $v(x, y)$ vara realdelen respektive imaginärdelen av en hel funktion. Visa att $u \cdot v$ är harmonisk. Räcker det att bara anta att u och v är harmoniska? Motivera ditt svar. (0.6)

3 a) Vilken konvergensskiva har potensserierna $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-\pi)^n}{n(n+1)}$ respektive $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$? (0.6)

b) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x+n}{n^2} \ ?$$

Konvergerar serien absolut för något $x \in \mathbb{R}$? (0.4)

4. Betrakta den 2π-periodiska funktionen $f(t)$ så att $f(t) = |t|(\pi - |t|)$ för $t \in [-\pi, \pi]$.
a) Rita f i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ och beräkna den trigonometriska Fourierserien för f. (0.6)
b) Bestäm seriesumman $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. (0.4)

5. a) Låt $(f_n(x))$ vara en funktionsföljd definerad på ett gemensamt område D. Vad menas med att funktionsföljden konvergerar punktvis i D? Vad menas med att funktionsföljden konvergerar likformigt i D? Ge också ett tillräckligt villkor som garanterar att

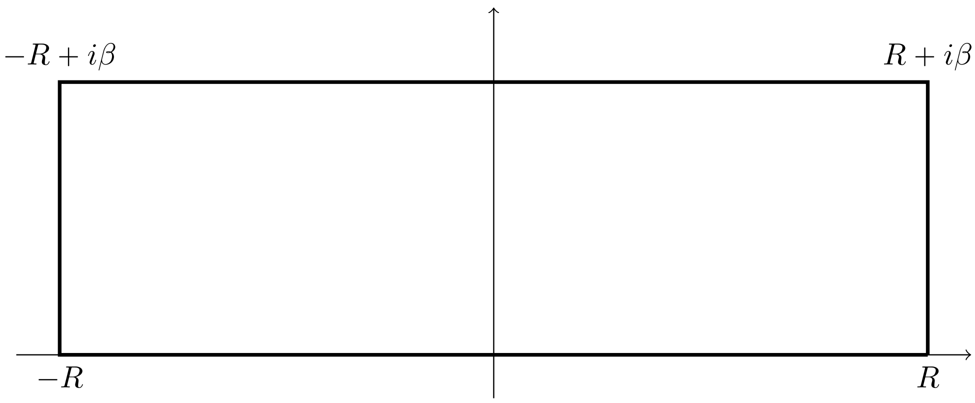
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(0.5)

b) Betrakta funktionsföljden $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}, x \geq 0$. Vad är det punktvisa gränsvärdet $f(x)$ för $f_n(x)$ då $n \to \infty$? Konvergerar $f_n(x)$ likformigt i $(0,\infty)$? Konvergerar $\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ mot $\int_0^\infty f(x)\,dx$? Använd resultatet i 6 d) (utan bevis). (0.5)

6. Låt $\alpha > 1$ vara ett reellt tal och $f(z) = \dfrac{e^z}{e^{\alpha z}+1}$. För (fixerat) $0 < \beta \in \mathbb{R}$ och (stora) $0 < R \in \mathbb{R}$, betrakta rektangelkonturen $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ med

$\gamma_1 = [-R, R]$, $\quad \gamma_2 = [R, R+i\beta]$, $\quad \gamma_3 = [R+i\beta, -R+i\beta]$ och $\gamma_4 = [-R+i\beta, -R]$.



Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}\,dx$ på följande sätt.

a) Visa att $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 0.$ (0.2)

b) Välj ett lämpligt β så att $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = C \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$ för något $C \in \mathbb{C}$. (0.3)

c) Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$ (0.3)

d) Utgående från c) visa att $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha+1}\,dx = \frac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}$ för $\alpha > 1$. (0.2)

Lycka till!

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
Funktionsteori
2016–10–27

1.a) Karakteristiska ekvationen är $r^2-r+\dfrac{1}{4}=0$. den har dubbelrot $r=\dfrac{1}{2}$. Allmänna lösningen till det homogena systemet är därför

$$a_n^{hom}=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_2n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ansats för partikulärlösningen $a_n^{part}=A\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ ger $A=16$.
Insättning av begynnelsevärdena ger $C_1=1$, $C_2=1$

Svar:

$$a_n=(n+1)\cdot 2^{-n}+16\cdot 4^{-n}.$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left((n+1)\cdot 2^{-n}+16\cdot 4^{-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left((n+1)+16\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

2. a) För pricipalgrenen måste det gälla att $z-2-4i$ inte är negativt reellt eller 0. Det betyder att största området är

$$\{z\in\mathbb{C}\,:\,z\neq x+4i,\ x\leq 2\}.$$

b) Om $f=u+iv$ är en hel funktion så är funktionen $f^2=u^2-v^2+i(2uv)$ också holomorf på hela planet. Det följer att $2uv$ (därmed också uv) är harmonisk.
Om vi sätter $u(x,y)=v(x,y)=x$ så är både u och v harmoniska. Men $u\cdot v=x^2$ är det inte.

3. a) Vi skriver om

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2z-\pi)^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}(z-\frac{\pi}{2})^n.$$

Det ger

$$L=\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n}}=2\qquad\text{och}\qquad R=\frac{1}{L}=\frac{1}{2}.$$

Därför är konvergensskivan $\{z\in\mathbb{C}\,:\,\left|z-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{1}{2}\}$.
För den andra summan har vi

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}.$$

Därför är $R=\frac{1}{L}=4$ och konvergensskivan $\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|<4\}$.

b) Fixera $x \in \mathbb{R}$ och betrakta

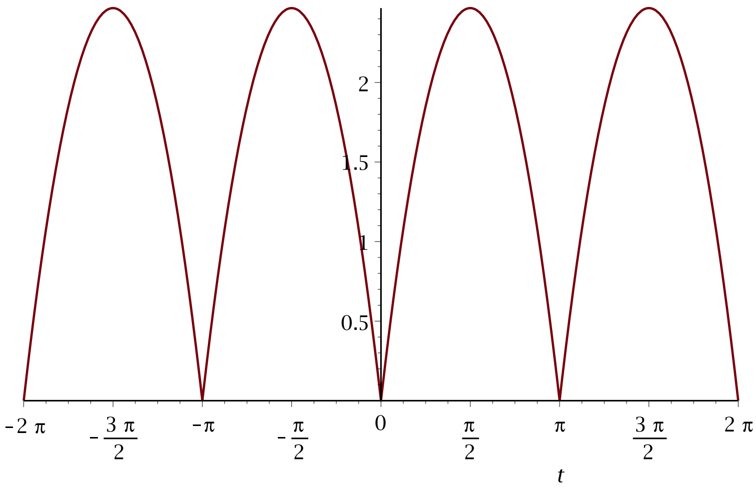
$$S_N := \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{x+n}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{x}{n^2} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Den första serien konvergerar absolut och den andra konvergerar enligt Leibniz' test. Därför konvergerar S_N (och därmed serien) för alla $x \in \mathbb{R}$. Eftersom

$$\sum_{n=1}^{N} |(-1)^n| \frac{|x+n|}{n^2} \geq \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{|x|}{n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right|$$

och den andra serien i absolutbeloppet divergerar och den första serien konvergerar, divergerar serien av absolutbeloppet för alla $x \in \mathbb{R}$ och serien är inte absolutkonvergent för något x.

4.a)



Figur 1: f i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$

Eftersom $\Omega = 1$ och f är jämn är $b_k = 0$ och

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |t|(\pi - |t|)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t(\pi - t)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

och

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t(\pi - t) \cos(kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t(\pi - t)\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} (\pi - 2t) \sin(kt)\, dt \\ &= \frac{2}{\pi k} \left[\frac{(\pi - 2t)\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k^2} \int_0^{\pi} 2\cos(kt)\, dt = -\frac{2}{k^2}(1 + (-1))^k. \end{aligned}$$

Det betyder att

$$a_{2k+1} = 0 \qquad a_{2k} = -\frac{1}{k^2} \qquad b_k = 0.$$

och

$$f(t) \sim \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2kt).$$

b) Med hjälp av Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \frac{\pi^4}{30} = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Därför är $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

5.a) Se läroboken definition 6.2 (sida 192), definition 6.8 (sida 196) och sats 6.16 (sida 200).

b) Det punktvisa gränsvärdet ($x \geq 0$) är

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n+1} = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}.$$

Eftersom $f_n(x)$ är kontinuerliga men $f(x)$ inte är det så är konvergensen inte likförmig. Trots det har vi

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} = 1 = \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

6.a) Vi har

$$\left|e^{\alpha z}+1\right| \geq \left|e^{\alpha z}\right| - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{e^{\alpha z}+1}\right| \leq \frac{1}{e^{\alpha R}-1}.$$

så för $z \in \gamma_2$

$$|f(z)| \leq \frac{|e^{R+iy}|}{e^{\alpha R}-1} = \frac{1}{e^{(\alpha-1)R}-e^{-R}}.$$

Med ML-olikheten

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}\,dz\right| \leq \frac{l(\gamma_2)}{e^{(\alpha-1)R}-e^{-R}} = \frac{\beta}{e^{(\alpha-1)R}-e^{-R}} \to 0 \qquad (R\to\infty).$$

Bevis för γ_4 är likadan.

b) Välj $\beta = \beta(\alpha) = \dfrac{2\pi}{\alpha}$. Då är på γ_3

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_R^{-R}\frac{e^{x+i\frac{2\pi}{\alpha}}}{e^{\alpha(x+i\frac{2\pi}{\alpha})}+1}\,dx = -e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}\int_{-R}^{R}\frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}\,dx = -e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

och $C = -e^{-\frac{2\pi}{\alpha}i}$.

c) Vi använder residysatsen. Den enda singulariteten innanför γ (med $\beta = \dfrac{2\pi}{\alpha}$) är $z = \dfrac{\pi}{\alpha}i$. Vi får

$$\sum_{j=1}^{4}\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z=\frac{\pi}{\alpha}i}\left(\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}\right) = -2\pi i\,\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha}.$$

Om $R\to\infty$ får vi

$$\left(1-e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}\,dx = -2\pi i\,\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}i}}{\alpha}$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}\,dx = \frac{2\pi i}{\alpha\left(e^{\frac{\pi}{\alpha}i} - e^{-\frac{\pi}{\alpha}i}\right)} = \frac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

d) Vi användar substitutionen $x = e^t$, $dx = e^t\,dt$, $-\infty < t < \infty$ om $0 < x < \infty$. Så är

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha + 1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t}{e^{\alpha t}+1}\,dt.$$