LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2016-08-22 kl 8–13

Hjälpmedel: Utdelat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Lös differensekvationen

$$x_n - 4x_{n-1} + 5x_{n-2} = -2^{n-2}, \quad n \geq 2,$$

med begynnelsevärdena $x_0 = 1, \quad x_1 = 2.$

2. Bestäm en holomorf funktion $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sådan att $f(0) = i$ samt att

$$u(x,y) = x - 4xy.$$

Ange svaret som en funktion av $z = x + iy$.

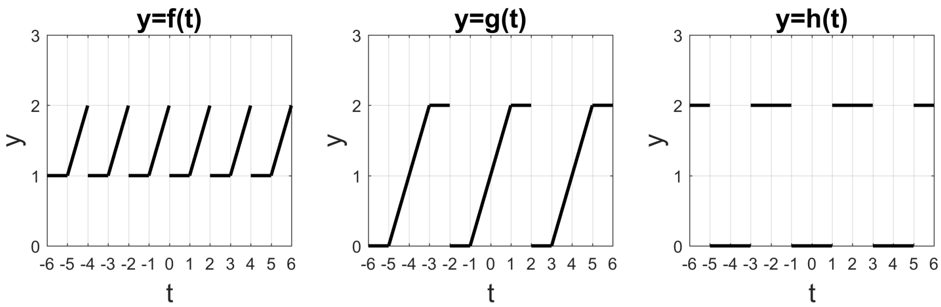
3. Vilka av serierna

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, **d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$, **f)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{k}$, **g)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{(1+i)k}$, **h)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+2}{k+1}$,

är konvergenta och vilka är divergenta? Motivera dina svar.
Bedömning: 0 – 3 rätt ger 0 poäng. Därefter 0.2 poäng per korrekt motiverat svar.

4. De periodiska funktionerna f, g och h ges av graferna nedan.



a) Vilken av funktionerna har en trigonometrisk Fourierserie på formen

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi t}{2} \ ? \qquad (0.3)$$

b) Bestäm

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2. \qquad (0.5)$$

c) Konvergerar den trigonometriska Fourierserien likformigt
då $-4 < t < 4$? (0.2)

Var god vänd!

5. a) Vilket är det största område där $\sqrt{1-z}$ är analytisk, om $\sqrt{z}$ definieras med hjälp av logaritmens principalgren. (0.3)

b) Låt σ_a vara cirkeln $|z| = a$ genomlöpt ett varv i positiv led. Avgör för vilka värden på a som integralen

$$\int_{\sigma_a} \frac{\sqrt{1-z}}{1+3z^2}\, dz$$

är väldefinierad samt beräkna integralen för dessa värden på a. Här skall $\sqrt{z}$ definieras på samma sätt som i a). Svaret skall förenklas. (0.7)

6. a) Bestäm en lösning i form av en potensserie till differentialekvationen

$$z^2 f''(z) + f(z) = \frac{1}{3+z^2} .$$

Beräkna även konvergensradien R. (0.4)

b) Bestäm $f(0)$ samt visa att

$$\left| f(z) - \frac{1}{3} \right| \leq \frac{1}{18}, \quad \text{då } |z| \leq 1,$$

där f är lösningen i a). (0.3)

c) Beräkna

$$\int_{\sigma} \frac{1}{f(z)}\, dz,$$

där σ är enhetscirkeln genomlöpt ett varv i positiv led och f är lösningen i a). Resultatet i b) får användas även om man ej lyckats visa det. (0.3)

LYCKA TILL!

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FUNKTIONSTEORI
2016-08-22

1. $x_n = 2\sqrt{5}^n \cos\left(\arctan(1/2)n\right) - 2^n$.

2. $f(z) = z + i(2z^2 + 1)$.

3. Konvergenta: a), c), d), och e). Divergenta: övriga.

4. **a)** Funktionen g har den givna Fourierserien.

b) $4/3$.

c) Den trigonometriska Fourierserien konvergerar inte likformigt då $-4 < t < 4$.

5. **a)** Överallt utom då z är reellt och ≥ 1.

b) Integralen är väldefinierad om $0 < a < 1$, $a \neq 1/\sqrt{3}$ (med $\sqrt{0} \overset{\text{def}}{=} 0$ så är integralen även definierad om $a = 1$).
För a mindre än $1/\sqrt{3}$ blir integralen noll och för a mellan $1/\sqrt{3}$ och ett så blir integralen

$$-\frac{2\sqrt{2}\pi i}{3^{3/4}} \sin(\pi/12).$$

6. **a)**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}(4k^2 - 2k + 1)} z^{2k}, \quad R = \sqrt{3}$$

.

b) $f(0) = c_0 = \frac{1}{3}$.

c) 0.