TENTAMENSSKRIVNING **FUNKTIONSTEORI**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **FMAF01**
MATEMATIK **2016–03–14 kl. 14–19**

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. För att du skall kunna erhålla full poäng skall dina lösningar vara läsbara och försedda med ordentliga motiveringar. Lämna tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Låt

$$s_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n.$$

Bestäm en formel för s_n, till exempel genom att lösa en rekursionsekvation med $s_n - s_{n-1}$ i vänsterledet.

2. a) Visa att

$$\operatorname{Re}\big(2\operatorname{Log}(1 - e^{i\theta})\big) = \ln\big(2 - 2\cos\theta\big).$$

Här antas det att $0 < \theta < 2\pi$. (0.5)

b) Antag att u och v utgör real- respektive imaginärdel av en holomorf funktion f på $\mathbb{C}$. Visa att f måste vara konstant om $u + v$ är konstant. (0.5)

3. a) Påstående: För varje par av kurvor γ_1 och γ_2 som startar i 0 och slutar i $1 + i$ gäller det att

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz = \int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz.$$

Bevisa påståendet om det är sant eller ge ett motexempel om det är falskt. (0.5)

b) Beräkna kurvintegralen

$$\int_C \frac{1}{z^3 + z^2}\,dz,$$

där C är den kurva som kan parametriseras av $t \mapsto 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. (0.5)

4. I denna uppgift betraktar vi potensserien

$$J(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k}.$$

a) Visa att serien är konvergent för alla $z \in \mathbb{C}$ (vilket betyder att J är analytisk på hela $\mathbb{C}$). (0.3)

b) Gör en feluppskattning om $J(1)$ approximeras med

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}}. \qquad (0.3)$$

c) Gör en feluppskattning om $J(i)$ approximeras med

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{(k!)^2 2^{2k}}. \qquad (0.4)$$

5. Låt $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Beräkna serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{b^2 + k^2},$$

till exempel genom att utveckla den 2π-periodiska funktionen f, som ges av $f(t) = e^{bt}$ på intervallet $0 \leqslant t < 2\pi$, i en trigonometrisk Fourierserie.

6. Vi påminner om att de hyperboliska funktionerna sinh och cosh definieras för alla $z \in \mathbb{C}$ genom

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{och} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Låt $R > 0$ och beteckna med Ω_R den rektangel som har hörn i $\pm R$ och $\pm R + i\pi/2$ (se figur nedan). Låt vidare funktionen f definieras som

$$f(z) = \frac{\cosh(z)}{\cosh(4z)}.$$

a) Bestäm samtliga poler för f i Ω_R, och beräkna motsvarande residyer. (0.2)

b) Verifiera att

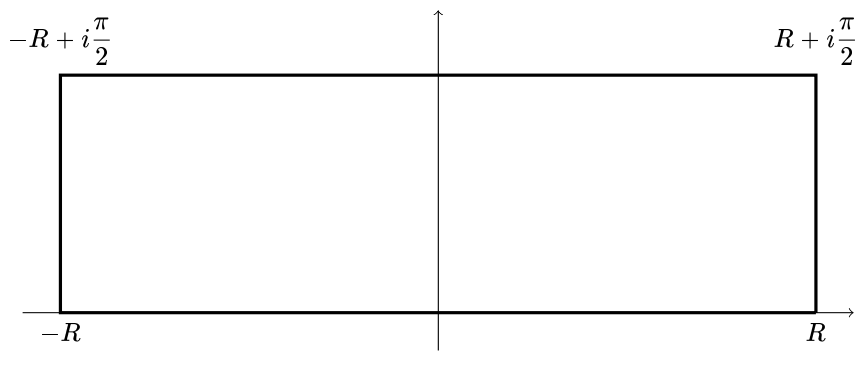
$$f\left(x + i\frac{\pi}{2}\right) = i\frac{\sinh(x)}{\cosh(4x)}, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (0.2)$$

c) Visa uppskattningen

$$|f(\pm R + it)| \leqslant 4e^{-3R}, \quad t \in \mathbb{R},\ R > 1. \qquad (0.2)$$

d) Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh(x)}{\cosh(4x)}\, dx. \qquad (0.4)$$



Lycka till!

SVAR/LÖSNINGAR **FUNKTIONSTEORI**
LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **FMAF01**
MATEMATIK **2016–03–14 kl. 14–19**

1. Rekursionsekvationen är $s_n - s_{n-1} = n2^n$. Det gäller att $s_n^h = A$, där A är en godtycklig konstant, löser den homogena ekvationen $s_n - s_{n-1} = 0$. Vidare ger ansatsen $s_n^p = (an+b)2^n$ att

$$(an+b)2^n - \big(a(n-1)+b\big)2^{n-1} = n2^n \iff a = 2,\ b = -2,$$

så $s_n^p = 2(n-1)2^n$. Alltså är $s_n = s_n^h + s_n^p = A + 2(n-1)2^n$. Eftersom $s_1 = 1 \cdot 2^1 = 2$ så blir $A = 2$. Svar: $s_n = 2 + 2(n-1)2^n$. [Uppgiften kan även lösas till exempel genom att notera att $s_n = 2s_n'(2)$ där $s_n(x)$ definieras som den geometriska summan $s_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$.]

2. a) En direkt räkning ger (här använder vi bland annat att $|z|^2 = z\bar{z}$)

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\big(2\operatorname{Log}(1-e^{i\theta})\big) &= 2\ln|1-e^{i\theta}| = \ln|1-e^{i\theta}|^2 \\ &= \ln\big((1-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})\big) = \ln\big(2 - e^{i\theta} - e^{-i\theta}\big) \\ &= \ln\big(2 - 2\cos\theta\big).\end{aligned}$$

b) Under antagandena gäller det att $u_x' + v_x' = 0$ och $u_y' + v_y' = 0$ varför Cauchy–Riemanns ekvationer implicerar (lös ett enkelt ekvationssystem) att $u_x' = u_y' = 0$ och $v_x' = v_y' = 0$. Det följer att u och v är konstanta, varför även $f = u + iv$ är det. [Alternativt hade vi kunnat notera att $u + v = \operatorname{Re}((1-i)f)$ och motivera att $(1-i)f$, och därmed f, är konstant som i Exempel 1.22.]

3. a) Påståendet är falskt. Med (till exempel) det räta linjestycket $\gamma_1 : t \mapsto (1+i)t$ och parabeln $\gamma_2 : t \mapsto t + it^2$ ($0 \leqslant t \leqslant 1$ i bägge fallen) får vi

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (1-i)t(1+i)\,dt = 1 \quad \text{och} \quad \int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (t-it^2)(1+i2t)\,dt = 1 + i/3.$$

b) Integralens värde blir noll. [Detta kan fås med residykalkyl, eller genom att partialbråksuppdela och beräkna två integraler med Cauchys integralsats, eller genom att införa två nya kurvor som endast omsluter var sin pol och använda Cauchys integralformel (jämför exempel 3.27 i boken), eller, kanske enklast, med deformation av kurvan som i övning 3.19.]

4. a) Med

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k} \quad \text{får vi} \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|z|^2}{4(k+1)^2}$$

som för varje fixt $z \in \mathbb{C}$ konvergerar mot 0 då $k \to +\infty$. Kvottestet borgar för att serien är absolutkonvergent, och därmed konvergent, för alla $z \in \mathbb{C}$.

b) Villkoren för Leibniz test är uppfyllda, och vi får att storleken på felet kan uppskattas med beloppet av nästkommande term, det vill säga (med de vanliga beteckningarna)

$$|r_3| \leqslant |a_4| = \frac{1}{(4!)^2 2^{2\times 4}} = \frac{1}{147\,456} \approx 6.78 \times 10^{-6}.$$

[Detta kan jämföras med det verkliga felet som ungefär är 6.71×10^{-6}.]

c) Eftersom serien är positiv kan vi till exempel göra uppskattningen

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2 2^{2k}} - \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{(k!)^2 2^{2k}} &= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2 2^{2k}} \\ \leqslant \frac{1}{(4!)^2} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{4^k} &= \frac{1}{(4!)^2}\frac{1}{192} \approx 9.04 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Varianter finns. I stället för att kasta ut bägge fakulteterna från summan kan vi kasta ut en fakultet och uppskatta med exponentialfunktionens potensserieutveckling,

$$\frac{1}{4!}\sum_{k=4}^{+\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{1}{4}\Big)^k = \frac{1}{4!}\Big[e^{1/4} - \Big(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{4^3}\Big)\Big] \approx 7.14 \times 10^{-6}.$$

[Dessa uppskattningar kan jämföras med det verkliga felet som ungefär är 6.85×10^{-6}.]

5. Med bokens beteckningar är $T = 2\pi$ och $\Omega = 1$. Alltså är

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{bt}\,dt = \frac{1}{2\pi b}(e^{2\pi b} - 1).$$

Vidare får vi (partialintegrera ett par gånger, eller använd Eulers formler)

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{bt}\cos(kt)\,dt = \frac{b(e^{2\pi b} - 1)}{\pi(b^2 + k^2)} \quad \text{och} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{bt}\cos(kt)\,dt = \frac{k(1 - e^{2\pi b})}{\pi(b^2 + k^2)}$$

varför den trigonometriska Fourierserien för vår funktion blir

$$\frac{1}{2\pi b}(e^{2\pi b} - 1) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b(e^{2\pi b} - 1)}{\pi(b^2 + k^2)}\cos(kt) + \frac{k(1 - e^{2\pi b})}{\pi(b^2 + k^2)}\sin(kt).$$

För att få något som liknar serien i uppgiften väljer vi $t = 0$, och får enligt sats 7.18 i kursboken att serien där konvergerar mot medelvärdet $(e^{2\pi b} + 1)/2$, så

$$\frac{1}{2}(e^{2\pi b} + 1) = \frac{1}{2\pi b}(e^{2\pi b} - 1) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b(e^{2\pi b} - 1)}{\pi(b^2 + k^2)}, \quad \text{så} \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{b^2 + k^2} = \frac{\pi}{2b}\frac{e^{2\pi b} + 1}{e^{2\pi b} - 1} - \frac{1}{2b^2}.$$

6. a) Eftersom $\cosh z = \cos(iz)$ finner vi att $\cosh 4z = 0$ precis då $i4z = \pi/2 + k\pi$ med $k \in \mathbb{Z}$. Inuti Ω_R får vi två enkelpoler, i $z_1 = i\pi/8$ och $z_2 = i3\pi/8$. Residyregel 4 ger

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}(f) = \frac{\cosh z_1}{4\sinh 4z_1} = \cdots = -i\frac{1}{4}\cos(\pi/8), \quad \operatorname*{Res}_{z=z_2}(f) = \frac{\cosh z_2}{4\sinh 4z_2} = \cdots = i\frac{1}{4}\sin(\pi/8).$$

b) Påståendet följer från Eulers formler, $2\cosh(x + i\pi/2) = e^x e^{i\pi/2} + e^{-x}e^{-i\pi/2} = 2i\sinh x$ och $2\cosh(4x + 4i\pi/2) = e^{4x}e^{i2\pi} + e^{-4x}e^{-i2\pi} = 2\cosh(4x)$.

c) Eftersom f är jämn räcker det att vi visar oliketen för $f(R+it)$. Med triangelolikheterna och $R > 1$ får vi

$$|f(R + it)| = \left|\frac{e^R e^{it} + e^{-R}e^{-it}}{e^{4R}e^{i4t} + e^{-4R}e^{-i4t}}\right| \leqslant \frac{|e^R e^{it}| + |e^{-R}e^{-it}|}{\big||e^{4R}e^{i4t}| - |e^{-4R}e^{-i4t}|\big|} = \frac{e^R + e^{-R}}{e^{4R} - e^{-4R}}$$

För $R > 1$ är vidare $e^{-R} < e^R$ och $e^{-4R} < e^{4R}/2$ varur olikheten i uppgiften följer.

d) Den sökta integralen är konvergent tack vare uppskattningen i c), och den kan beräknas som det symmetriska gränsvärdet $\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx$. Vi integrerar över rektangeln i figuren. Integralerna längs de vertikala delarna kommer att gå mot noll då $R \to +\infty$ enligt uppskattningen i c). Integralen längs den övre horisontella delen är lika med noll eftersom funktionen där (se b)) är udda. Integralen på den undre horisontella delen konvergerar mot den sökta integralen. Enligt residysatsen får vi därför, efter gränsgång $R \to +\infty$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cosh(x)}{\cosh(4x)}\,dx &= i2\pi\Big(\operatorname*{Res}_{z=z_1}(f) + \operatorname*{Res}_{z=z_2}(f)\Big) = i2\pi\Big(-i\frac{1}{4}\cos(\pi/8) + i\frac{1}{4}\sin(\pi/8)\Big)\\ &= \frac{\pi}{2}\big(\cos(\pi/8) - \sin(\pi/8)\big).\end{aligned}$$

Svaret kan förenklas till $\frac{\pi}{4}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.