LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2016–01–07 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen

$$x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 12n + 14, \qquad x_0 = 6, \quad x_1 = 2.$$

2. Endast kortfattade lösningar behövs på denna uppgift. (5 × 0.2)

a) Finns det någon funktion f som är holomorf (på hela $\mathbb{C}$) och vars realdel är $u(x,y) = x^2 - y^3$?

b) Vilken konvergensradie har serien $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k}$?

c) Vilken typ av singularitet har $\dfrac{2z}{(z-1)^2 \sin z}$ i $z = 1$? (Om det är en pol, ange även ordningen.)

d) Hur definieras z^α om z och α är komplexa tal?

e) Beräkna integralen $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z}{(z+4)e^z}\, dz$.

3. a) Visa att realdelen av en holomorf funktion är harmonisk. (0.3)

b) Bestäm samtliga funktioner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$u(x,y) = x\, g(y)$$

blir realdelen av en funktion f som är holomorf på hela komplexa planet. Uttryck alla sådana f som funktioner av $z = x + iy$. (0.7)

4. a) Avgör vilka av följande serier som konvergerar respektive divergerar: (3 × 0.2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{5^k}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{(k+i)^3}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{\sqrt{k+1}\ln k}.$$

b) Funktionen

$$f(z) = \frac{e^z}{z-2}$$

har en Taylorserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k$. Vad är dess konvergensradie? Beräkna värdet av $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. (0.4)

5. Funktionen f är 2π-periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

a) Bestäm den trigonometriska Fourierserien, $\mathcal{FS}_f^{\mathrm{trig}}(t)$, för f. (0.4)

b) Utnytta resultatet i a) för att beräkna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \qquad (0.3)$$

c) Konvergerar $\mathcal{FS}_f^{\mathrm{trig}}$ likformigt på något intervall som innehåller punkten $t = 1$? Bestäm i så fall (ett så stort du kan) sådant intervall. (0.3)

6. a) Låt $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$. Vilka olika värden kan integralen

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

anta om γ är en enkel, sluten (styckvis slät) kurva som inte går genom origo? (0.3)

b) Låt $n \geq 1$ vara ett positivt heltal. För vilka värden på n har funktionen

$$g_n(z) = \frac{\cos z}{z^n}$$

en primitiv funktion på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? (0.7)

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2016–01–07 Svar och anvisningar

1. $x_n = (-5)^n + n^2 + n + 5$.

2. a) Nej (eftersom u inte är harmonisk).

b) Konvergensradien blir $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Dubbelpol. (Någon form av motivering krävs!)

d) $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

e) 0 (enl. Cauchys integralsats: integranden är holomorf på och inuti kurvan).

3. a) Se kursboken.

b) $g(y) = Ay + B$, där $A, B \in \mathbb{R}$. Ur det följer att $f(z) = -\frac{iA}{2}z^2 + Bz + C$, där även $C \in \mathbb{R}$.

4. a) Första och tredje serierna är divergenta. Den andra är konvergent. (Observera att termerna i den andra serien är komplexa: man kan inte använda jämförelsetest utan absolutbelopp.)

b) Taylorserien är centrerad i $z = -1$. Konvergensradien blir därmed $R = 3$ (avståndet mellan -1 och närmaste singularitet), och $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = f(0) = -\frac{1}{2}$

5. Funktionen f är 2π-periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

a) Efter en del beräkningar (utnyttja gärna Eulers formler) får man:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}, \qquad a_k = \frac{1 + (-1)^k}{\pi(1 - k^2)} \text{ (med } a_1 = 0), \qquad b_k = \begin{cases} 0, & k \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & k = 1 \end{cases}$$

Observera att fallet $k = 1$ måste behandlas separat.

b) Resultatet i a) tillsammans med Parseval och lite algebra ger $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

c) $\mathcal{FS}_f^{\text{trig}}$ konvergerar likformigt på hela $\mathbb{R}$. (Utnyttja antingen resultatet i a) tillsammans med Weierstrass test, eller hänvisa till teorin: f är kontinuerlig och styckvis C^1, så sats 7.25 garanterar likformig konvergens.)

6. a)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \begin{cases} 0, & \text{om } \gamma \text{ inte omsluter } 0 \\ 2\pi i, & \text{om } \gamma \text{ omsluter } 0. \end{cases}$$

b) En komplex, kontinuerlig funktion f har en primitiv funktion om och endast om $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ för alla enkla, slutna kurvor (sats 3.19). Residykalkyl (enklast med hjälp av residyregel 2) visar att detta villkor är uppfyllt för g_n om och endast om n är jämnt.