LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
FUNKTIONSTEORI
2015–08–27 kl 8–13

HJÄLPMEDEL: Utdelat formelblad.
Lösningarna ska vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Undersök vilka av följande serier som konvergerar:

$$\textbf{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \textbf{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3} \quad \textbf{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{k+1} \quad \textbf{d)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-i)^k \quad \textbf{e)} \sum_{k=2}^{\infty} [\ln k - \ln(k+1)].$$

2. Låt $\operatorname{Log} z$ vara principalgrenen av logaritmen.

a) Beräkna i^i. (0.3)

b) Ge exempel på tal z_1 och z_2 så att $\operatorname{Log} z_1 z_2 \neq \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$. (0.3)

c) Vilken konvergensradie fås om $\operatorname{Log}(z+1)$ utvecklas i potensserie kring $z = i$. (0.2)

d) Vad blir $\int_C \operatorname{Log}(z+1)dz$ om C är den positivt orienterade cirkeln $|z-1| = \sqrt{2}$? (0.2)

3. Funktionen f är udda och periodisk med perioden 2. I intervallet $0 < t < 1$ är $f(t) = 2 - t$.

a) Rita grafen av $f(t)$ i intervallet $-3 < t < 3$. (0.2)

b) Beräkna Fourierkoefficienterna för funktionen f. (0.5)

c) Vilken eller vilka av följande serier är konvergenta? (0.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} ikc_k \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ic_k}{k}.$$

4. **a)** Uttryck $|e^z|$ och $\arg(e^z)$ med hjälp av realdel och imaginärdel av z. (0.2)

b) Lös ekvationen $e^{2z} - 2e^z + 2 = 0$ och rita ut lösningarna i det komplexa planet. (0.3)

c) Beräkna integralen

$$\int_C \frac{1}{e^{2z} - 2e^z + 2}\, dz$$

där C är cirkeln $|z| = 3$ genomlöpt ett varv i positiv led. (0.5)

Var god vänd!

5. **a)** Vad menas med att en komplex funktion f är deriverbar i en punkt z? (0.2)

b) Vad menas med att f är holomorf i ett område Ω? (0.2)

c) Vad menas med att en reellvärd funktion $u(x, y)$ är harmonisk i ett område Ω? (0.2)

d) Visa att om $f = u + iv$ är holomorf i Ω så är u och v harmoniska i Ω. (0.4)

6. Till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

finns en lösning på formen $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, där $|x| < R$.

a) Bestäm en rekursionsekvation för koefficienterna c_k. (0.5)

b) Bestäm konvergensradien R. (0.5)

Lycka till!

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

LÖSNINGAR
FUNKTIONSTEORI
2015–08–27

1. a) Konvergerar: Serien är en geometrisk serie med kvot $\frac{1}{3} < 1$.

b) Konvergerar: Jämför med den konvergenta serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

c) Divergent då termerna ej går mot noll.

d) Divergerar som en geometrisk serie med kvot $1-i$, där $|1-i| = \sqrt{2} > 1$.

e) Divergerar: $s_n = (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \cdots + (\ln n - \ln(n+1))$ =(teleskopsumma)= $\ln 2 - \ln(n+1) \to -\infty$.

2. a) Med den givna grenen blir $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(\ln|i| + i \operatorname{Arg} i)} = e^{i(0+i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$

b) Med $z_1 = i$ och $z_2 = -1+i$ fås $z_1 z_2 = -1-i$ och

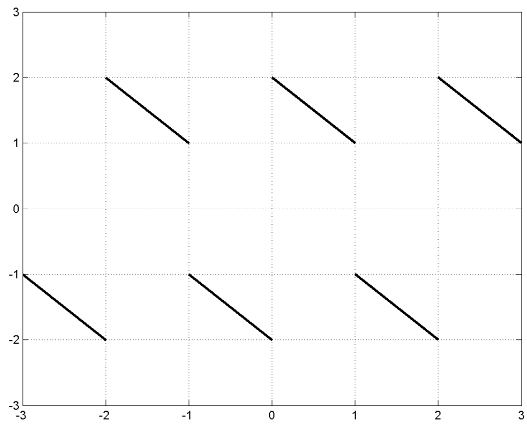
$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} z_1 &= \operatorname{Log} i = \ln|i| + i \operatorname{Arg} i = i\pi/2 \\
\operatorname{Log} z_2 &= \operatorname{Log}(-1+i) = \ln|-1+i| + i \operatorname{Arg}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + i3\pi/4 \\
\operatorname{Log} z_1 z_2 &= \operatorname{Log}(-1-i) = \ln|-1-i| + i \operatorname{Arg}(-1-i) = \ln\sqrt{2} - i3\pi/4 \neq \operatorname{Log} z_1 \cdot \operatorname{Log} z_2
\end{aligned}$$

c) Principalgrenen av $\operatorname{Log}(1+z)$ är ej definierad om $z+1$ är ett ickepositivt reellt tal, dvs om z är reellt och ≤ -1. Vid potensserieutveckling kring $z = i$ blir konvergensradien avståndet till närmsta singulära punkt, alltså $R = \sqrt{2}$.

d) Funktionen $\operatorname{Log}(z+1)$ är holomorf på och innanför kurvan C. Enligt Cauchys integralsats är då

$$\int_C \operatorname{Log}(z+1) = 0 \ .$$

3. a)



b)

$$c_k = \frac{i((-1)^k - 2)}{k\pi} \quad \text{då} \quad k \neq 0, \quad c_0 = 0.$$

c) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$. För termerna $|c_k| = \dfrac{(-(-1)^k + 2)}{k\pi}$ gäller $|c_k| \geq \dfrac{1}{k\pi}$ och serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\pi} = \dfrac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ är divergent, alltså är även den givna serien divergent.

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} ikc_k$. Termerna $ikc_k = \dfrac{(-(-1)^k+2)}{\pi}$ går inte mot 0 då $k \to \infty$, alltså är den givna serien divergent.

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{ic_k}{k}$. För termerna $\dfrac{ic_k}{k} = \dfrac{(-(-1)^k+2)}{k^2\pi}$ gäller $0 < \dfrac{ic_k}{k} \le \dfrac{3}{k^2\pi}$ och serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{3}{k^2\pi} = \dfrac{3}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ är konvergent, alltså är även den givna serien konvergent.

4. a) $|e^z| = e^x$ och $\arg(e^z) = y + 2\pi k$, där k är ett heltal och $z = x + iy$.

b) Sätt $e^z = w$. Insatt i ekvationen ger detta andragradsekvationen $w^2 - 2w + 2 = 0$, vilken har lösningarna $w = 1 \pm i$. Ekvationerna $e^z = 1 \pm i$ har lösningarna

$$\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + k2\pi) \ \text{ resp } \ \ln\sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + k2\pi)\ , \quad k \text{ heltal.}$$

c) Integrationsvägen C omsluter de två singulära punkterna $z_1 = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ och $z_2 = \ln\sqrt{2} - i\pi/4$. Alltså är integralen

$$\int_C \frac{1}{e^{2z} - 2e^z + 2}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{2} \operatorname*{Res}_{z_k} f(z) = 2\pi i(\frac{1}{2e^{2z_1} - 2e^{z_1}} + \frac{1}{2e^{2z_2} - 2e^{z_2}}) =$$

$$= \pi i(\frac{1}{(1+i)^2 - (1+i)} + \frac{1}{(1-i)^2 - (1-i)}) = \cdots = -\pi i$$

5) Se lärobok.

6. a) Då $|x| < R$ gäller att

$$\begin{cases} y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ y'(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k c_k x^{k-1} \\ y''(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k \end{cases}$$

Insättning i differentialekvationen $y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 0$ ger att

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1)c_{k+2} - (2k-1)c_k\right) x^k = 0 \quad \text{för alla } x \text{ sådana att } |x| < R$$

Eftersom denna likhet gäller för alla x sådana att $|x| < R$ är

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} - (2k-1)c_k = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$c_{k+2} = \frac{2k-1}{(k+2)(k+1)}c_k = 0$$

Men $c_0 = y(0) = 1$ och $c_1 = y'(0) = 0$.

Svar: Rekursionsekvationen blir

$$\begin{cases} c_{k+2} = \dfrac{2k-1}{(k+2)(k+1)} c_k, k = 0, 1, 2, \dots \\ c_0 = 1, c_1 = 0 \end{cases}$$

b) Eftersom $c_1 = 0$ ger rekursionsekvationen att $c_k = 0$ för alla udda k. Alltså är

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j} x^{2j}$$

Då blir

$$\left| \frac{c_{2(j+1)} x^{2(j+1)}}{c_{2j} x^{2j}} \right| = [\text{rekursionsekvationen}] = \frac{|4j-1|}{(2j+2)(2j+1)} |x|^2 \to 0 \text{ då } j \to \infty$$

Enligt d'Alemberts kvotkriterium konvergerar potensserien då för alla x. Alltså är $R = \infty$.