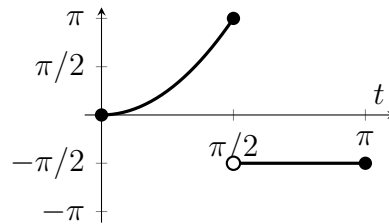


Hjälpmedel: Bifogat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Lös rekursionsekvationen $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 4$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.
2. Endast kortfattade lösningar krävs på denna uppgift. (0.2/st)
 - a) Beräkna $\log(-1 + i)$.
 - b) Finns det någon holomorf funktion på \mathbb{C} , vars realdel är $u(x, y) = x^3 - y^3$?
 - c) Ge ett exempel på en *betingat* konvergent serie.
 - d) Ge ett exempel på en potensserie, centrerad i $z = i$ med konvergenzradie $R = 1$.
 - e) Ge ett exempel på en funktion f med en dubbelpol i $z = 0$ sådan att $\text{Res}_{z=0} f(z) = 1$.

3. Funktionen f är 2π -periodisk och jämn. I figuren ser du grafen för f på intervallet $0 \leq t \leq \pi$.



- a) Låt $S(t)$ beteckna summan av f 's trigonometriska Fourierserie. Beräkna $S(t)$ i punkterna $t = \pi/2$, $t = -\pi/2$ och $t = 3\pi$. (0.3)
- b) Rita tydliga bilder av graferna till $f(t)$ och $S(t)$ (två bilder!) på hela intervallet $-\pi \leq t \leq 3\pi$. (0.3)
- c) En av nedanstående serier är den trigonometriska Fourierserien till f . Vilken? Motivera ordentligt. (0.4)

$$\begin{aligned}
 A : & \quad \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k^2\pi^2 - 16) \sin \frac{k\pi}{2} + 8k\pi \cos \frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt \\
 B : & \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k\pi^2 - 16) \sin \frac{k\pi}{2} + 8\pi \cos \frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \sin kt \\
 C : & \quad -\frac{\pi}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k^2\pi^2 - 16) \sin \frac{k\pi}{2} + 8k\pi \cos \frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt \\
 D : & \quad \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k\pi^2 - 16) \sin \frac{k\pi}{2} + 8\pi \cos \frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt \\
 E : & \quad -\frac{\pi}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k\pi^2 - 16) \sin \frac{k\pi}{2} + 8\pi \cos \frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^3} \cos kt
 \end{aligned}$$

4. a) Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar: (0.2+0.2+0.2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^5}{k!} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 - 5} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/k}}.$$

- b) För vilka reella värden på α konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)^\alpha$? (0.4)

5. Besselfunktionen J_n (där n är ett positivt heltal) definieras via potensseriutvecklingen

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

där $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ och $a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2n+k)}$ för $k \geq 2$.

- a) Bestäm konvergensradien för serien som definierar J_n . (0.3)

- b) Uppskatta resttermen om $J_n(1)$ approximeras med (0.3)

$$J_n(1) \approx \frac{1}{2^n n!} (a_0 + a_1 + a_2).$$

- c) Ange Maclaurinserien för J'_n och beräkna integralen (0.4)

$$\int_{|z|=1} \frac{J'_n(z)}{z^2} dz.$$

6. a) Låt $f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$. Visa att $f(z + i\pi) = -e^{-\pi} f(z)$ för alla z . (0.2)

- b) Beräkna integralen (0.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Ledning: integrera f från a-uppgiften längs randen av en rektangel med hörn i $\pm R$ och $\pm R + i\pi$.

1. Lösningen blir $x_n = (n - 1)(-1)^n + 1$.

2. a) $\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3\pi i}{4} + 2\pi i k$, där $k \in \mathbb{Z}$

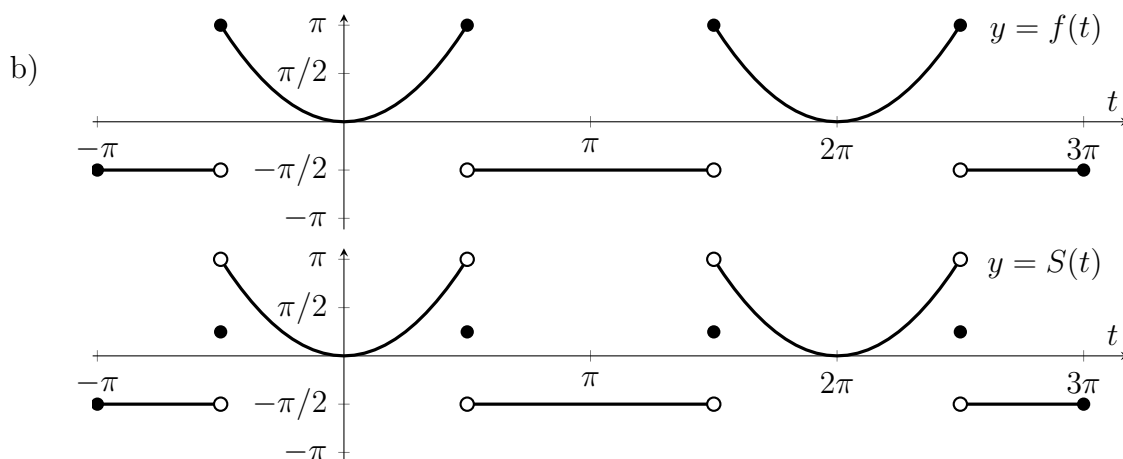
b) Nej, u är inte harmonisk.

c) Till exempel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

d) Till exempel: $\sum_{k=0}^{\infty} (z - i)^k$.

e) Till exempel: $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$.

3. a) Börja gärna med att göra första halvan av uppgift b. Funktionen är begränsad (och därmed L^1), styckvis kontinuerlig och styckvis C^1 och uppfyller därmed villkoren i sats 7.18 i alla punkter (och villkoren i sats 7.16 i de flesta punkter). Det följer ur dessa konvergenssatsar att $S(\pi/2) = \pi/4$, $S(-\pi/2) = \pi/4$ och $S(3\pi) = -\pi/2$.



c) Funktionen är jämn, så serie B är utesluten. Medelvärde över en period kan omöjligt vara $\pi/2$, vilket utesluter serie A och D. Serie E konvergerar likformigt med hjälp av Weierstrass M-test, så dess seriesumma är kontinuerlig. Den enda möjligheten är alltså C.

4. a) Den första serien är konvergent (enklast med kvottestet), den andra konvergent (Leibniz) och den tredje är divergent (termerna går inte mot 0).

b) Serien är konvergent om och endast om $\alpha > 2/3$. (Jämför till exempel med $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{3\alpha/2}}$.)

5. a) Konvergensradien blir ∞ . (Observera att $a_k = 0$ när k är udda..)

b) Serien är alternerande och termerna uppfyller villkoren i Leibniz test. Det följer att resttermen till beloppet är mindre än

$$\frac{1}{2^n n!} a_4 = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{1}{8(2n+2)(2n+4)}$$

- c) Maclaurinserien för J'_n blir (enklast att först multiplicera in z^n och derivera termvis, vilket är tillåtet på hela \mathbb{C} tack vare resultatet i a-uppgiften):

$$J'_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{\infty} (n+k) a_k z^{n+k-1} \quad (*)$$

Med hjälp av residyregel 2 ser vi att

$$\int_{|z|=1} \frac{J'_n(z)}{z^2} dz = 2\pi i c_1$$

där c_1 betecknar koefficienten framför z^1 i Maclaurinserien för J'_n . Vi ser att $c_1 = 0$ om $n > 2$ (lägstgradstermen i (*) har grad $n-1$). För $n = 2$ ger $k = 0$ rätt grad, och därmed

$$c_1 = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} (2+0) a_0 = \frac{1}{4}.$$

För $n = 1$ ger $k = 1$ rätt grad och

$$c_1 = \frac{1}{2^1 \cdot 1!} (1+1) a_1 = 0.$$

Sammanfattningsvis:

$$\int_{|z|=1} \frac{J'_n(z)}{z^2} dz = \begin{cases} \frac{i\pi}{2}, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2. \end{cases}$$

(Även $n = 0$ ger en nollskild integral, men vi tittar bara på *positiva* n i denna uppgift.)

6. a) Följer ur algebra och observationen att $e^{\pm i\pi} = -1$.
- b) Följ ledningen. Integralen längs de två lodräta stäckorna går mot 0 då $R \rightarrow \infty$ mha ML-olikheten och uppskattningen (för $z = R + it$)

$$f(z) = \left| \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \right| \leq \frac{1}{e^R - e^{-R}}$$

och en likartad uppskattning för $z = -R + it$. På sträckan $x + i\pi$ utnyttjar vi beräkningen i a) och får att

$$\int f(z) dz = \int_R^{-R} f(t + i\pi) dt = \int_{-R}^R e^{-\pi} f(z) dt.$$

Sammanfattningsvis (efter att $R \rightarrow \infty$) får vi kvar:

$$(1 + e^{-\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\pi/2} \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} = \pi e^{-\pi/2}$$

och därmed (ta realdelen):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{\pi e^{\pi/2}}{e^{\pi} + 1}.$$