LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2015–01–07 kl 8–13

Hjälpmedel: Bifogat formelblad.
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Skriv fullständiga meningar och förklara dina beteckningar. Ge tydliga och enkla svar där så är möjligt.

1. Visa att funktionen $u(x, y) = xy^3 - x^3y$ är harmonisk. Bestäm alla holomorfa (analytiska) funktioner f vars realdel är $u(x, y)$. Svara på formen $f(z)$, där $z = x + iy$.

2. Låt $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

a) Förenkla $s_{n+1} - s_n$. (0.3)

b) Betrakta resultatet i a) som en rekursionsekvation. Lös den för att hitta en formel för s_n. (0.7)

3. a) Vilka av följande serier är konvergenta respektive divergenta? Var noggrann med motiveringen. (0.2/styck)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{\sqrt{k}} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2 + (-1)^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{(k+i)^2}$$

b) Ge ett exempel (med motivering) på en alternerande serie som är divergent. (0.2)

c) Ge ett exempel (med motivering) på en funktionsserie som är punktvis, men inte likformigt, konvergent på ett intervall. (0.2)

4. Funktionen f är 2π-periodisk och uppfyller att

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

a) Bestäm f:s trigonometriska Fourierserie. (0.5)

b) Vad konvergerar den trigonometriska serien i a) mot för $t = 0$? För $t = 4\pi$? (0.2)

c) Beräkna seriesumman

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1 + (-1)^k)^2}{k^4}.$$

(Du kan ha glädje av att veta att $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$.) (0.3)

5. Visa att funktionen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k + 3^k} z^k$$

är holomorf (analytisk) på enhetsskivan $\{z : |z| < 1\}$. Beräkna integralen

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^3} \, dz.$$

6. a) Formulera Cauchys integralsats. (0.2)

b) Formulera ML-olikheten. (0.2)

c) Visa att det inte går att hitta något polynom p sådant att

$$\left| p(z) - \frac{1}{z} \right| \leq \frac{1}{2}$$

för alla z med $|z| = 1$. (0.6)

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Funktionsteori
2015–01–07 Svar och anvisningar

1. En beräkning visar att $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, så u är harmonisk. Cauchy–Riemanns ekvationer ger så småningom (tillsammans med identitetssatsen) att

$$f(z) = \frac{iz^4}{4} + iC$$

där $C \in \mathbb{R}$ är godtycklig.

2. a) $s_{n+1} - s_n = n^2 + 2n + 1$.

b) $s_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$. Glöm inte att bestämma konstanten m.h.a. t.ex. s_1.

3. a) Den första serien divergerar. (Jfr. t.ex. med $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$).
Den andra serien divergerar. (Jfr. t.ex. med $\sum_{k=2}^{\infty} 1/k$, gärna på gränsvärdesform.)
Den tredje serien är absolutkonvergent och därmed konvergent. (Jfr. t.ex. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ med $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$.

b) Till exempel $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$. (Termerna går inte mot 0.)

c) Till exempel den trigonometriska Fourierserien för en diskontinuerlig funktion, som ändå uppfyller villkoren i Sats 7.18 och därmed konvergerar punktvis.
Ett annat exempel: geometriska serien på intervallet $(-1, 1)$ (detaljerna utelämnade, se boken).

4. a) $\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos kt - \frac{(-1)^k}{k} \sin kt$.

b) Funktionen uppfyller villkoren i sats 7.16, så Fourierserien konvergerar mot $f(0) = 0$ respekive $f(4\pi) = 0$ i de två punkterna.

c) Utnyttja Parseval. Svaret blir $\dfrac{\pi^4}{24}$.

5. Potensseriens konvergensskiva blir $|z| < 3$ och teorin visar att summan är holomorf på enhetsskivan. (T.o.m. på en cirkelskiva med radie 3.) Residyregel 2 ger de kortaste räkningarna för att visa att

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{f(z)}{z^3}\, dz = \frac{8\pi i}{13}.$$

6. a) Se kursboken. Glöm inte förutsättningarna!

b) Se kursboken.

c) Om det finns en sådan funktion ger ML-olikheten att

$$\left| \int_{|z|=1} p(z) - \frac{1}{z} \right| \leq \pi.$$

Å andra sidan är

$$\int_{|z|=1} (p(z) - \frac{1}{z})\, dz = -2\pi i,$$

vilket ger en motsägelse. Något sådant polynom p kan alltså inte finnas.