

Hjälpmedel: Utdelat formelblad.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. För ett visst värde på den reella konstanten  $a$  är

$$u(x, y) = e^y \sin x + x^3 + axy^2 + 4xy$$

realdelen av en funktion  $f(z) = f(x + iy)$  som är holomorf i hela det komplexa talplanet. Dessutom är  $f(0) = 2i$ . Bestäm  $f(z)$  uttryckt som funktion av variabeln  $z$ .

2. Bestäm en lösning till rekursionsekvationen

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 10 \cdot 3^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sådan att serien  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  dels är konvergent, dels har summan 1.

3. a) Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{4z}{3z^2 - 2z - 1}$$

i en potensserie kring origo. (0.4)

b) Beräkna potensseriens konvergensradie. (0.4)

c) Bestäm  $f'(0)$  och  $f''(0)$ . (0.2)

4. Talet  $e^6$  skall approximeras med hjälp av

$$e^6 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k}{k!}$$

genom att summera ändligt många termer. Uppskatta antalet termer som behövs för att resttermen

$$r_n = \left| e^6 - \sum_{k=0}^n a_k \right|$$

ska uppfylla

$$r_n \leq \frac{3}{2} a_{n+1}.$$

5. Beräkna med residykalkyl

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta.$$

6. Funktionen  $f$  är periodisk med perioden  $2\pi$  och då  $|t| \leq \pi$  är  $f(t) = |t|$ .

a) Bestäm den trigonometriska Fourierserieutvecklingen av  $f$ . (0.3)

b) Visa (med fullständig motivering) att

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi(k^4 + k^2)} (\cos kt + k \sin kt)$$

löser differentialekvationen

$$y'(t) + y(t) = f(t). \quad (0.7)$$

*LYCKA TILL!*

1. Funktionen  $u$  är harmonisk. Detta ger att

$$0 = \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -e^y \sin x + 6x + e^y \sin x + 2ax = 2x(3 + a) \quad \text{för alla } x, y$$

Alltså är  $a = -3$ .

Ett nödvändigt utseende på  $u$  är alltså

$$u(x, y) = e^y \sin x + x^3 - 3xy^2 + 4xy$$

Sätt  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Vi bestämmer nu  $v$  med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer.

$$\begin{cases} v_x = -u_y = -e^y \sin x + 6xy - 4x \\ v_y = u_x = e^y \cos x + 3x^2 - 3y^2 + 4y \end{cases} \iff \begin{cases} v(x, y) = e^y \cos x + 3x^2 y - 2x^2 + g(y) \\ v_y = e^y \cos x + 3x^2 - 3y^2 + 4y \end{cases}$$

Första och andra ekvationen ger oss nu två uttryck för  $v_y$ . Alltså är

$$e^y \cos x + 3x^2 - 3y^2 + 4y = e^y \cos x + 3x^2 + g'(y) \iff g'(y) = 4y - 3y^2 \iff g(y) = 2y^2 - y^3 + K$$

där  $K$  är en reell konstant. Alltså är  $v(x, y) = e^y \cos x + 3x^2 y - 2x^2 + 2y^2 - y^3 + K$ . Detta ger att

$$f(z) = e^y \sin x + x^3 - 3xy^2 + 4xy + i(e^y \cos x + 3x^2 y - 2x^2 + 2y^2 - y^3 + K)$$

Speciellt ger  $y = 0$  att

$$f(x) = \sin x + x^3 + i \cos x - i2x^2 + iK$$

Enligt identitetssatsen är då

$$f(z) = \sin z + z^3 + i \cos z - i2z^2 + iK = z^3 + i(e^{-iz} - 2z^2 + K)$$

Eftersom  $f(0) = 2i$  är  $K = 1$ .

2. Den homogena ekvationen

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 0$$

har den karakteristiska ekvationen  $2r^2 - 5r + 2 = 0$  med rötterna  $r = 2$  och  $r = 1/2$ . Alltså är

$$x_n^{\text{hom}} = A \cdot 2^n + B \cdot 2^{-n},$$

där  $A$  och  $B$  är konstanter.

Som partikulärlösning till

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 10 \cdot 3^{-n} \tag{1}$$

prövar vi med ansatsen  $x_n^{\text{par}} = C \cdot 3^{-n}$ , där  $C$  är en konstant. Insättning i (1) ger att  $C = 18$ .

Den allmänna lösningen till (1) är då

$$x_n = x_n^{\text{hom}} + x_n^{\text{par}} = A \cdot 2^n + B \cdot 2^{-n} + 18 \cdot 3^{-n}.$$

Serien  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$  är då konvergent precis då  $A = 0$ . Seriens summa (två geometriska summor) blir då  $2B + 27$ , vilken är 1 då och endast då  $B = -13$ .

3. a) Funktionen  $f$  är rationell. Vi partialbråksuppdelar:

$$f(z) = \frac{4z}{(3z+1)(z-1)} = \frac{1}{3z+1} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-(-3z)} - \frac{1}{1-z}.$$

Nu kan vi använda den kända geometriska serien och får att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} ((-3)^k - 1)z^k$$

b) Funktionen har två poler,  $z = 1$  och  $z = -1/3$ . Konvergensradien är avståndet från origo till den närmaste polen, alltså lika med  $1/3$ .

c) Vi har  $f^{(n)}(0) = n!a_n$ , där  $a_n$  är koefficienten som står med  $z^n$  i potensserien. Således är

$$f'(0) = a_1 = -4, \quad f''(0) = 2a_2 = 16.$$

4. Se förberedelseuppgift till datorlaboration 2 (med faktorn  $2^{-1}$  i relationen  $a_{n+2} \leq 2^{-1}a_{n+1}$  utbytt mot  $3^{-1}$ ).

5. Genom att sätta  $z = e^{ix}, 0 \leq x \leq 2\pi$ , ser man att

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}{2 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = \\ &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 4z + 1)z}. \end{aligned}$$

Integranden  $f(z)$  har enkla poler i  $0, -2 + \sqrt{3}$  och  $-2 - \sqrt{3}$  + (utanför  $|z| = 1$ ). Residysatsen ger alltså att

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \sum_{|z|<1} \text{Res } f(z) = 2\pi \left( 1 + \frac{z^2 + 1}{z(z - (-2 - \sqrt{3}))} \Big|_{z=-2+\sqrt{3}} \right) \\ &= 2\pi \left( 1 + \frac{-4(-2 + \sqrt{3})}{(-2 + \sqrt{3})2\sqrt{3}} \right) = 2\pi \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

6. a) Eftersom  $f$  är jämn förkommer enbart cosinustermer i den trigonometriska Fourierutvecklingen av  $f$ . Enligt formelbladet blir

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{\pi}{2}$$

och

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos kt dt = [f \text{ jämn}] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{t \sin kt}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin kt}{k} dt \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos kt}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \end{aligned}$$

**Svar:** Den trigonometriska Fourierserien blir  $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \cos kt$ .

b) Sätt  $u_k(t) = \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi(k^4 + k^2)} (\cos kt + k \sin kt)$  och  $y(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$ .

Om vi kan visa att

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$  är punktvis konvergent

2.  $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t)$  konvergerar likformigt överallt

så följer att  $y$  är en deriverbar funktion och att derivatan kan erhållas genom termvis derivation. För att visa 1. noterar vi först att

$$|u_k(t)| \leq \frac{2 \cdot 2}{\pi k^2(1+k^2)}(1+k \cdot 1) \leq \frac{2}{k^2}$$

Eftersom  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$  är konvergent följer att serien  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$  är absolutkonvergent och därmed konvergent.

För att visa 2. använder vi oss av en variant av Weierstrass majorantsats:

$$|u'_k(t)| \leq \frac{2 \cdot 2}{\pi k^2(k^2+1)} \cdot |-k \sin kt + k^2 \cos kt| \leq \frac{4}{\pi k^2} \cdot \frac{k+k^2}{k^2+1} \leq \frac{8}{\pi k^2} \leq \frac{3}{k^2} = m_k$$

där  $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$  är konvergent.

Vi får då avslutningsvis att

$$\begin{aligned} y'(t) + y(t) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u'_k(t) + u_k(t)) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2(k^2+1)} (-k \sin kt + k^2 \cos kt + \cos kt + k \sin kt) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \cos kt = f(t). \end{aligned}$$