

Namn: .....

Personnummer: .....

Program, årskurs: .....



KTH Computer Science  
and Communication

## Tentamen, del 1 DN1240 – Numeriska metoder gk II F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

**DEL 1:** 20 poäng. Inga hjälpmedel. Betygsgräns för betyg E: 14 poäng (inkl. bonuspoäng).

**Bonus.** Ange här dina giltiga bonuspoäng från vt-11 eller ht-11, och den kursomgång (linje, termin) där poängen erhöles.

Antal bonuspoäng

Kursomgång:

**1a.** Ekvationen  $x = 1 - 0.2e^{3x}$  ska lösas med Newtons metod. Utför en iteration med startapproximationen  $x_0 = 0$ .

Resultatet blir:

(2 p)

0

-1/2

1/3

1

-1/3

-1

1/2

något annat värde

1 (4)

(2 p) b. Villkoret för att fixpunktsiteration för samma ekvation som i del a, vars rot =  $\alpha$  (och samma startapproximation) med iterationsformeln  $x_{n+1} = 1 - 0.2e^{3x_n}$  ska konvergera lyder

- |   |  |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> $ 1 - 0.2e^{3\alpha}  < 1$ | <input type="checkbox"/> $ 0.2e^{3\alpha}  > 1$      |
| <input type="checkbox"/> $ 1 - 0.2e^{3\alpha}  > 1$ | <input type="checkbox"/> $0.2e^{3\alpha}/\alpha = 0$ |
| <input type="checkbox"/> $ 1 - 0.6e^{3\alpha}  < 1$ | <input type="checkbox"/> $ 0.6e^{3\alpha}  < 1$      |
| <input type="checkbox"/> $ 1 - 0.6e^{3\alpha}  > 1$ | <input type="checkbox"/> $ 0.6e^{3\alpha}  > 1$      |
| <input type="checkbox"/> $ 0.2e^{3\alpha}  < 1$     | <input type="checkbox"/> något annat villkor         |

2. En metod för numerisk integration har noggrannhetsordning  $p$ . Detta betyder att: (2 p)

- avrundningsfelet minskar med faktorn  $p$  för varje delintervall
- trunkeringsfelet minskar med faktorn  $p$  för varje delintervall
- steglängden  $h = p$  har använts
- trunkeringsfelet är proportionellt mot steglängden upphöjt till  $p$
- antal delintervall är  $p$
- antalet delintervall som krävs för att uppnå felet  $\varepsilon$  är proportionellt mot  $\varepsilon^{-p}$

3. För att anpassa en linje till punkterna

$x =$	1	3	4	5	11	13
$y =$	2	2.2	2.5	3	4.4	5.2

används minstakvadratmetoden. Detta leder till ett överbestämt ekvationssystem  $Ax \approx b$ .

Vilken dimension har matrisen  $A$ ? (1p)

- 2 rader, 6 kolumner
- 6 rader, 2 kolumner
- 2 rader, 2 kolumner
- 6 rader, 6 kolumner
- 4 rader, 6 kolumner

Hur många ekvationer har normalekvationerna? (1p)

- 2
- 3
- 4
- 5
- 6

4a. Om lösning av ett fullt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär lösning av systemet med tusen obekanta? (2 p)

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 0.2 s. | <input type="checkbox"/> 100 s.            |
| <input type="checkbox"/> 0.5 s. | <input type="checkbox"/> 500 s.            |
| <input type="checkbox"/> 1 s.   | <input type="checkbox"/> 800 s.            |
| <input type="checkbox"/> 2 s.   | <input type="checkbox"/> 1000 s.           |
| <input type="checkbox"/> 50 s.  | <input type="checkbox"/> något annat värde |

b. Om lösning av ett tridiagonalt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär en effektiv lösning av systemet med tusen obekanta? (2 p)

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 0.2 s. | <input type="checkbox"/> 100 s.            |
| <input type="checkbox"/> 0.5 s. | <input type="checkbox"/> 500 s.            |
| <input type="checkbox"/> 1 s.   | <input type="checkbox"/> 800 s.            |
| <input type="checkbox"/> 2 s.   | <input type="checkbox"/> 1000 s.           |
| <input type="checkbox"/> 50 s.  | <input type="checkbox"/> något annat värde |

5. Differentialekvationen  $y' = y^2 + \cos(\pi x)$ ,  $y(1) = 1/2$ , löses med Eulers metod och steglängden  $h = 0.2$ . Då blir  $y$ -värdet vid  $y(1.2)$ : (2 p)

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> 0.01 | <input type="checkbox"/> 0.35              |
| <input type="checkbox"/> 0.02 | <input type="checkbox"/> 0.4               |
| <input type="checkbox"/> 0.1  | <input type="checkbox"/> 0.5               |
| <input type="checkbox"/> 0.2  | <input type="checkbox"/> 0.52              |
| <input type="checkbox"/> 0.25 | <input type="checkbox"/> 0.7               |
| <input type="checkbox"/> 0.3  | <input type="checkbox"/> något annat värde |

6. För en iterativ metod uppskattas felen  $e_n$  i iterationerna till

$$e_7 = 0.2477, \quad e_8 = 0.049, \quad e_9 = 0.0104, \quad e_{10} = 0.00198$$

Vilken konvergensordning motsvarar detta?

(2 p)

- 0  
 1  
 2  
 3  
 annat

7. Styckvis linjär interpolation har noggrannhetsordning

(1 p)

- 1                       4  
 2                       5  
 3                       6

8. Värdet av  $\int_0^\pi (\cos(\frac{x}{2}))^{\sin 2x} dx$  beräknas med trapetsregeln och steglängden  $h = \pi/2$ . Resultatet blir:

(2 p)

- 0                        $3\pi/4$   
  $\pi/4$                         $2\pi$   
  $\pi/2$                         $5\pi/4$   
  $\pi$                        något annat värde

9. Vi vill beräkna  $y = \sin(x)$  när  $x$  är behäftat med ett relativfel  $r_x \ll 1$ . Vad kan vi säga om relativfelet  $r_y$  i  $y$  (när  $x$  och  $y$  inte ligger nära noll)?

(1 p)

- $r_y \approx \frac{r_x x}{\sin(x)}$                         $r_y \approx \frac{r_x x}{\tan(x)}$   
  $r_y \approx r_x \cos(x)$                         $r_y \approx r_x \tan(x)$   
  $r_y \approx \frac{r_x}{\sin(x)}$                         $r_y \approx \frac{r_x}{\cos(x)}$

V.g. glöm inte skriva ditt namn och personnummer överst på framsidan!



KTH Computer Science  
and Communication

## Tentamen, del 2

### DN1240 – Numeriska metoder gk II

### F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

**DEL 2:** Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

1. Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som använder Newtons metod för att lösa det olinjära ekvationssystemet

$$\ln(x) + \sin(y) - 1/2 = 0,$$

$$\frac{x}{z^2} - \exp(-2x) - 1 = 0,$$

$$\sin(x + y) - \cos(z) = 0,$$

med ett fel i varje komponent av lösningen som är mindre än  $10^{-10}$ . Använd startgissningen  $x = y = z = 1$ . **(12 p)**

2. Givet funktionen  $y(x)$ .

- (a) Bestäm ett tredjegradspolynom som interpolerar  $y(x)$  i punkterna  $x = 0, 1, 2, 3$ . Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur polynomet är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

(b) Bestäm en (styckvis polynom-) funktion  $S(x)$  med egenskapen

- i.  $S(x)$  interpolerar  $y(x)$  i punkterna  $x = 0, 1, 2, 3$ ,
- ii.  $S(x)$  är ett förstgradspolynom i intervallet  $[0, 1]$ ,
- iii.  $S(x)$  är ett tredjegrads-polynom i intervallet  $[1, 2]$ ,
- iv.  $S(x)$  är ett förstgradspolynom i intervallet  $[2, 3]$ ,
- v.  $S'(x)$  kontinuerlig på hela intervallet  $[0, 3]$ .

Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur  $S(x)$  är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

3. En variant av Van der Pol-generatorn beskrivs av den ordinära differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0.$$

- (a) Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som beräknar lösningen  $x$  vid  $t = 5$  för begynnelsedata  $x(0) = 1$  och  $x'(0) = 0$ . Algoritmen ska vara baserad på Framåt Euler-metoden med steglängden  $h = 0.01$ . **(10 p)**
- (b) Modifiera din algoritm så att den istället använder den implicita Bakåt Euler-metoden,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

Nya element kan behöva introduceras i algoritmen. **(6 p)**

4. Formulera finita differensmetoden för randvärdesproblemet

$$u_{xx} + xu_x - \sin(x)u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 2.$$

Visa hur metoden leder till ett linjärt ekvationssystem  $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ . Specificera elementen i  $A$ -matrisen och högerledet  $\mathbf{b}$ . Var noga med att definiera alla variabler du använder och förklara innebörden av elementen i lösningsvektorn  $\mathbf{u}$ . (Inga räkningar behöver genomföras dock.) **(12 p)**



KTH Computer Science  
and Communication

## Tentamen, del 1 – Lösningar DN1240 – Numeriska metoder gk II F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

**DEL 1:** 20 poäng. Inga hjälpmedel. Betygsgräns för betyg E: 14 poäng (inkl. bonuspoäng).

- 1a.** Ekvationen  $x = 1 - 0.2e^{3x}$  ska lösas med Newtons metod. Utför en iteration med startapproximationen  $x_0 = 0$ . **(2 p)**

*Lösning:* Newtons metod appliceras på  $f(x) = 0$  där

$$f(x) = 1 - 0.2e^{3x} - x, \quad f'(x) = -0.6e^{3x} - 1.$$

Vi får

$$x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) = -f(0)/f'(0) = -(1 - 0.2)/(-0.6 - 1) = 0.8/1.6 = 1/2.$$

Svar: 1/2

- b.** Villkoret för att fixpunktsiteration för samma ekvation som i del a, vars rot =  $\alpha$  (och samma startapproximation) med iterationsformeln  $x_{n+1} = 1 - 0.2e^{3x_n}$  ska konvergera lyder **(2 p)**

*Lösning:* Villkor för konvergens är  $|\phi'(\alpha)| < 1$  där  $\phi(x)$  är fixpunktfunktionen

$$\phi(x) = 1 - 0.2e^{3x}, \quad \phi'(x) = -0.6e^{3x}.$$

Detta ger

Svar:  $|0.6e^{3\alpha}| < 1$ .

- 2.** En metod för numerisk integration har noggrannhetsordning  $p$ . Detta betyder att: **(2 p)**

Svar: trunkeringsfelet är proportionellt mot steglängden upphöjt till  $p$

3. För att anpassa en linje till punkterna

$x =$	1	3	4	5	11	13
$y =$	2	2.2	2.5	3	4.4	5.2

används minstakvadratmetoden. Detta leder till ett överbestämt ekvationssystem  $Ax \approx b$ .

Vilken dimension har matrisen  $A$ ? (1p)

Lösning: Systemet blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 11 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 2.2 \\ 2.5 \\ 3 \\ 4.4 \\ 5.2 \end{pmatrix}$$

Dvs,

Svar: 6 rader, 2 kolumner

Hur många ekvationer har normalekvationerna? (1p)

Lösning: Normalekvationerna är

$$A^T Ax = A^T b.$$

Eftersom  $A^T A$  är en  $2 \times 2$ -matris får vi

Svar: 2 st

4a. Om lösning av ett fullt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär lösning av systemet med tusen obekanta? (2 p)

Lösning: Komplexiteten att lösa ett fullt system är  $O(n^3)$ . Därför får vi

$$\text{tid} \approx cn^3 \Rightarrow 0.1 \approx c50^3 \quad c \approx 0.1 \times 50^{-3}.$$

Utnyttja detta för att uppskatta tidsåtgången för det stora systemet

$$\text{tid stort system} \approx c1000^3 \approx 0.1(1000/50)^3 = 0.1 \times 20^3 = 800.$$

Svar: 800 s

b. Om lösning av ett tridiagonalt ekvationssystem med 50 obekanta tar en tiondels sekund, hur lång tid tar då ungefär en effektiv lösning av systemet med tusen obekanta? (2 p)

Lösning: Komplexiteten att lösa ett tridiagonalt system med en effektiv metod är  $O(n)$ . Därför får vi

$$\text{tid} \approx cn \Rightarrow 0.1 \approx c50 \quad c \approx 0.1 \times 50^{-1}.$$

Utnyttja detta för att uppskatta tidsåtgången för det stora systemet

$$\text{tid stort system} \approx c1000 \approx 0.1(1000/50) = 0.1 \times 20 = 2.$$

Svar: 2 s

5. Differentialekvationen  $y' = y^2 + \cos(\pi x)$ ,  $y(1) = 1/2$ , löses med Eulers metod och steglängden  $h = 0.2$ . Vad blir  $y$ -värdet vid  $y(1.2)$ ? (2 p)

Lösning: Ett steg i Eulers metod lyder

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Här har vi

$$x_0 = 1, y_0 = 1/2, h = 0.2, f(x, y) = y^2 + \cos(\pi x).$$



Därför får vi

$$y_1 = \frac{1}{2} + 0.2 \left( \frac{1}{2^2} + \cos(\pi 1) \right) = \frac{1}{2} + 0.2 \left( \frac{1}{4} - 1 \right) = 0.35.$$

Svar: 0.35

6. För en iterativ metod uppskattas felet  $e_n$  i iterationerna till

$$e_7 = 0.2477, \quad e_8 = 0.049, \quad e_9 = 0.0104, \quad e_{10} = 0.00198$$

Vilken konvergensordning motsvarar detta? (2 p)

*Lösning:* Konvergensordning  $p$  innebär att  $e_{n+1} \approx ce_n^p$  för något värde  $c$ . Här har vi

$$e_8/e_7 \approx e_9/e_8 \approx e_{10}/e_9 \approx 1/5 \quad \Rightarrow \quad \text{linjär (första ordnings) konvergens}$$

Svar: 1

7. Styckvis linjär interpolation har noggrannhetsordning (1 p)

Svar: 2

8. Värdet av  $\int_0^\pi (\cos(\frac{x}{2}))^{\sin 2x} dx$  beräknas med trapetsregeln och steglängden  $h = \pi/2$ . (2 p)

*Lösning:* Funktionsvärdena vi behöver är

$$f(0) = 1^0 = 1, \quad f(\pi/2) = \cos(\pi/4)^0 = 1, \quad f(\pi) = 0^0 = 1.$$

Trapezregeln med  $h = \pi/2$  blir

$$\int_0^\pi \left( \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^{\sin 2x} dx \approx h \left( \frac{1}{2}f(0) + f(\pi/2) + \frac{1}{2}f(\pi) \right) = \frac{\pi}{2}(1/2 + 1 + 1/2) = \pi.$$

Svar:  $\pi$

9. Vi vill beräkna  $y = \sin(x)$  när  $x$  är behäftat med ett relativfel  $r_x \ll 1$ . Vad kan vi säga om relativfelet  $r_y$  i  $y$  (när  $x$  och  $y$  inte ligger nära noll)? (1 p)

*Lösning:* Låt absolutfelet i  $x$  och  $y$  vara  $e_x$  respektive  $e_y$ . Då ger felfortplantningsformeln (Taylorutveckling):

$$e_y \approx e_x y'(x) \quad \Rightarrow \quad r_y = \frac{e_y}{y} \approx \frac{e_x x}{x y} y'(x) = r_x \frac{x}{y} y'(x).$$

Här är  $y'(x) = \cos(x)$ ,

$$r_y \approx r_x \frac{x}{\sin(x)} \cos(x) = \frac{r_x x}{\tan(x)}.$$

Dvs,

Svar:  $r_y \approx \frac{r_x x}{\tan(x)}$ .



KTH Computer Science  
and Communication

## Tentamen, del 2 – Lösningar DN1240 – Numeriska metoder gk II F och CL

Lördag 17 december 2011 kl 9–12

**DEL 2:** Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

1. Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som använder Newtons metod för att lösa det olinjära ekvationssystemet

$$\begin{aligned}\ln(x) + \sin(y) - 1/2 &= 0, \\ \frac{x}{z^2} - \exp(-2x) - 1 &= 0, \\ \sin(x + y) - \cos(z) &= 0,\end{aligned}$$

med ett fel i varje komponent av lösningen som är mindre än  $10^{-10}$ . Använd startgissningen  $x = y = z = 1$ . (12 p)

*Lösning:*

Vi vill alltså lösa  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ , med

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \ln(x) + \sin(y) - 1/2 \\ \frac{x}{z^2} - \exp(-2x) - 1 \\ \sin(x + y) - \cos(z) \end{pmatrix}.$$

Newtons metod för system är

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - J(\mathbf{x}_n)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n),$$

där  $J$  är jakobianen till  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)^T$ , dvs

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \cos(y) & 0 \\ \frac{1}{z^2} + 2e^{-2x} & 0 & \frac{-2x}{z^3} \\ \cos(x + y) & \cos(x + y) & \sin(z) \end{pmatrix}.$$

En detaljerad algoritm i MATLAB med startgissningen  $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)^T$  som beräknar lösningen med ett fel på max  $10^{-10}$  i varje komponent, skulle därför kunna se ut såhär:

1 (6)

```

X = [1; 1; 1]; % Startgissning
TOL = 1e-10; % Feltolerans
r = X; % Dummy, vadsomhelst större än TOL

while (norm(r,'inf')>TOL) % 'inf' ger maxnorm-fel

    x=X(1); y=X(2); z=X(3);

    f1 = log(x)+sin(y)-1/2;
    f2 = x/z^2-exp(-2*x)-1;
    f3 = sin(x+y)-cos(z);

    F = [f1; f2; f3];
    J = [1/x cos(y) 0; 1/z^2+2*exp(-2*x) 0 -2*x/z^3; cos(x+y) cos(x+y) sin(z)];

    r = -J\F;
    X=X+r;
end

disp('(x,y,z) =')
disp(X');

```

Algoritmen avbryter när  $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|_\infty = \|\mathbf{r}\|_\infty$  är mindre än TOL varför felet också kommer vara mindre än TOL, i detta fall  $10^{-10}$ . Lösningen blir

$$x \approx 0.608318, \quad y \approx 1.647533, \quad z \approx 0.685055.$$

## 2. Givet funktionen $y(x)$ .

- (a) Bestäm ett tredjegradspolynom som interpolerar  $y(x)$  i punkterna  $x = 0, 1, 2, 3$ . Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur polynomet är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) **(5 p)**

*Lösning:*

Ansätt

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3. \quad (1)$$

(Newtons ansats är egentligen bättre, men i det här enkla fallet duger den naiva ansatsen.) Låt interpolationspunkterna vara  $x_j = j$ ,  $j = 0, \dots, 3$ . Polynomets koefficienter bestäms genom att lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ y(x_2) \\ y(x_3) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{pmatrix}.$$

Relationen mellan  $c_j$  och polynomet är som givet i ansatsen (1).

(b) Bestäm en (styckvis polynom-) funktion  $S(x)$  med egenskapen

- i.  $S(x)$  interpolerar  $y(x)$  i punkterna  $x = 0, 1, 2, 3$ ,
- ii.  $S(x)$  är ett förstgradspolynom i intervallet  $[0, 1]$ ,
- iii.  $S(x)$  är ett tredjegrads-polynom i intervallet  $[1, 2]$ ,
- iv.  $S(x)$  är ett förstgradspolynom i intervallet  $[2, 3]$ ,
- v.  $S'(x)$  kontinuerlig på hela intervallet  $[0, 3]$ .

Redovisa det linjära ekvationssystem som erhålles och specificera hur  $S(x)$  är relaterat till systemets lösning. (Inga beräkningar behöver genomföras.) (5 p)

*Lösning:*

Funktionen  $S(x)$  definieras av tre polynom,

$$S(x) = \begin{cases} p_1(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ p_2(x), & 1 \leq x \leq 2, \\ p_3(x), & 2 \leq x \leq 3. \end{cases} \quad (2)$$

Vi vet polynomens gradtal och vi kan göra följande ansatser

$$p_1(x) = a_0 + a_1x, \quad p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3, \quad p_3(x) = c_0 + c_1x. \quad (3)$$

Interpolationsvillkoren för polnomen kan nu skrivas

$$\begin{aligned} p_1(0) = y(0), & \Rightarrow & a_0 = y(0), \\ p_1(1) = y(1), & \Rightarrow & a_0 + a_1 = y(1), \\ p_2(1) = y(1), & \Rightarrow & b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = y(1), \\ p_2(2) = y(2), & \Rightarrow & b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3 = y(2), \\ p_3(2) = y(2), & \Rightarrow & c_0 + 2c_1 = y(2), \\ p_3(3) = y(3), & \Rightarrow & c_0 + 3c_1 = y(3). \end{aligned}$$

Villkoret att  $S'(x)$  är kontinuerlig ger slutligen

$$\begin{aligned} p_1'(1) = p_2'(1), & \Rightarrow & a_1 = b_1 + 2b_2 + 3b_3, \\ p_2'(2) = p_3'(2), & \Rightarrow & b_1 + 4b_2 + 12b_3 = c_1, \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att

$$p_1'(x) = a_1, \quad p_2'(x) = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2, \quad p_3'(x) = c_1.$$

I matrisform blir det linjära system som bildas av villkoren ovan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(2) \\ y(3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Relationen mellan koefficienterna  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$  och  $S(x)$  ges av (3) och (2).

3. En variant av Van der Pol-generatorn beskrivs av den ordinära differentialekvationen

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \sin(x) = 0.$$

- (a) Skriv en detaljerad algoritm (gärna i MATLAB) som beräknar lösningen  $x$  vid  $t = 5$  för begynnelsedata  $x(0) = 1$  och  $x'(0) = 0$ . Algoritmen ska vara baserad på Framåt Euler-metoden med steglängden  $h = 0.01$ . (10 p)

*Lösning:*

Skriv först om ekvationen som ett första ordningens system genom att sätta

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Då får vi

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) =: \begin{pmatrix} u_2 \\ (1 - u_1^2)u_2 - \sin(u_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Använd sedan Framåt Euler,

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{F}(\mathbf{u}_n).$$

I MATLAB blir det

```
h = 0.01;
```

```
u = [1 0]';
```

```
for t=0:h:5-h/2 % (-h/2 för att undvika avrundningsproblem)
```

```
    F = [u(2); (1-u(1)^2)*u(2)-sin(u(1))];
```

```
    u = u + h*F;
```

```
end
```

```
disp('x, xp =')
```

```
disp(u');
```

- (b) Modifiera din algoritm så att den istället använder den implicita Bakåt Euler-metoden,

$$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}).$$

Nya element kan behöva introduceras i algoritmen.

(6 p)

*Lösning:*

Eftersom Bakåt Euler är en implicit metod måste vi nu lösa ett olinjärt ekvationssystem för att stega fram från  $\mathbf{u}_n$  till  $\mathbf{u}_{n+1}$ . Systemet är

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}),$$

i vilket  $\mathbf{u}_n$  är given och  $\mathbf{u}_{n+1}$  är okänd. Med andra ord, vi behöver lösa  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0$  med

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{u}_n - h\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Ekvationen kan tex lösas med Newtons metod som i uppgift 1,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - J(\mathbf{x}_k)^{-1}\mathbf{G}(\mathbf{x}_k),$$

där jakobianen  $J(\mathbf{x})$ , med  $\mathbf{x} = (x, y)$  är given av

$$J(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}} = I - h \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h(2xy + \cos(x)) & 1 - h(1 - x^2) \end{pmatrix}.$$

Startgissningen kan tex väljas som lösningen i förra tidssteget:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_n$ . (Ett lite noggrannare alternativ är att välja startgissningen som resultatet av ett steg med *Framåt* Euler, dvs  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_n + h\mathbf{F}(\mathbf{u}_n)$ .) Notera att vi nu alltså får två nivåer av iteration: den yttre tidsstegning  $n = 0, 1, \dots$  och den inre ekvationslösningssiterationen  $k = 0, 1, \dots$  som görs i varje tidssteg.

I MATLAB blir det tex

```
h = 0.01;
u = [1 0]';
TOL=1e-10; % Feltolerans

for t=0:h:5-h/2 % (-h/2 för att undvika avrundningsproblem)

    % Lös G(X)=0 med Newtons metod och startgissningen X=u_n

    r = [1; 1]; % Dummy, vadsomhelst större än TOL
    X = u;
    while (norm(r,'inf')>TOL) % 'inf' ger maxnorm-fel

        x=X(1); y=X(2);

        F = [y; (1-x^2)*y-sin(x)];
        G = [x-u(1)-h*F(1); y-u(2)-h*F(2)];
        J = [1 -h; h*(2*x*y+cos(x)) 1-h*(1-x^2)];

        r = -J\G;
        X=X+r;
    end
    u = X; % u_{n+1} är lösningen
end

disp('(x, xp) = ')
disp(u');
```

#### 4. Formulera finita differensmetoden för randvärdesproblemet

$$u_{xx} + xu_x - \sin(x)u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 2.$$

Visa hur metoden leder till ett linjärt ekvationssystem  $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ . Specificera elementen i  $A$ -matrisen och högerledet  $\mathbf{b}$ . Var noga med att definiera alla variabler du använder och förklara innebörden av elementen i Lösningensvektorn  $\mathbf{u}$ . (Inga räkningar behöver genomföras dock.) (12 p)

Lösning:

Börja med att diskretisera problemet och introducera notation för detta. Dela in intervallet  $[0, \pi]$  i  $n + 1$  delar med längden  $h = \pi/(n + 1)$  och kalla delningspunkterna  $x_j = jh$ . Låt  $u_j$  approximera exakta lösningen i dessa punkter, dvs  $u_j \approx u(x_j)$ .

I varje inre punkt,  $j = 1, \dots, n$ , approximerar vi sedan derivatorna i ekvationen med andra ordningens differenskvoter,

$$u_{xx}(x_j) \approx \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}, \quad u_x(x_j) \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h}.$$

Det ger

$$\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + x_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \sin(x_j)u_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Multiplitera med  $h^2$  och samla ihop termerna

$$u_{j-1} \left(1 - \frac{hx_j}{2}\right) + u_j (-2 - h^2 \sin(x_j)) + u_{j+1} \left(1 + \frac{hx_j}{2}\right) = 0, \quad (4)$$

där  $j = 1, \dots, n$ . Vi har nu  $n$  ekvationer men  $n + 2$  obekanta. Utnyttja randvillkoren för att eliminera  $u_0$  och  $u_{n+1}$ :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = 2.$$

Detta ger för  $j = 1$ ,

$$u_1 (-2 - h^2 \sin(x_1)) + u_2 \left(1 + \frac{hx_1}{2}\right) = 0, \quad (5)$$

och för  $j = n$ ,

$$u_{n-1} \left(1 - \frac{hx_n}{2}\right) + u_n (-2 - h^2 \sin(x_n)) = -2 \left(1 + \frac{hx_n}{2}\right), \quad (6)$$

Tillsammans ger (4,5,6) det linjära ekvationssystemet  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  med  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{pmatrix},$$

där

$$a_j = -2 - h^2 \sin(x_j), \quad b_j = 1 + \frac{hx_j}{2}, \quad c_j = 1 - \frac{hx_j}{2},$$

och högerledet

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \left(1 + \frac{hx_n}{2}\right) \end{pmatrix}.$$