



KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
onsdag, 11 januari 2017

Skrivtid: 08:00-11:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av sex uppgifter som vardera ger maximalt sex poäng.

Del A på tentamen utgörs av de två första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De två följande uppgifterna utgör del B och de två sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	F _x
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst tre poäng.

DEL A

1. (a) För vilka värden på k har ekvationssystemet (med avseende på x , y och z)

$$\begin{aligned} kx + ky + z &= 3 \\ 2x + ky + z &= 2 \\ 4x + 3y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

en entydig lösning, ingen lösning, oändligt många lösningar? (4 p)

- (b) Lös ekvationssystemet för $k = 1$. (2 p)

2. P är det plan i \mathbb{R}^3 som innehåller punkten $(1, 0, 0)$ och linjen $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm en normalvektor och en ekvation till P . (3 p)

- (b) Bestäm ortogonalprojektionerna av punkten $(2, 4, 2)$ på linjen som går genom origo och punkten $(0, 1, -1)$. (3 p)

Var god vänd!

DEL B

3. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen \mathcal{V} till basen \mathcal{W} av ett delrum U av \mathbb{R}^4 .

(a) Bestäm övergångsmatrisen från bas \mathcal{W} till bas \mathcal{V} . **(3 p)**

(b) Låt $f: U \rightarrow U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$. **(3 p)**

(Med $[f]_{\mathcal{B}}$ menas matrisen för avbildningen f med avseende på basen \mathcal{B} .)

4. En linjär avbildning $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras av formeln $L(\vec{x}) = \vec{e}_3 \times \vec{x}$ för alla vektorer \vec{x} .

Här är $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och med \times menas kryssprodukten.

(a) Bestäm standardmatris till $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. **(2 p)**

(b) L transformerar planet $x_3 = 0$ till sig själv. Beskriv geometriskt hur vektorer i detta plan transformerar. **(1 p)**

(c) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till L . **(3 p)**

DEL C

5. Låt Q vara den kvadratiska form på \mathbb{R}^{2n} som är definierad genom

$$Q(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \dots + x_nx_{n+1}.$$

(a) Bestäm den symmetriska matrisen som tillhör Q . **(2 p)**

(b) Avgör karaktären av Q : positivt/negativt (semi)definit eller indefinit? **(4 p)**

6. Låt A vara en $n \times n$ -matris. $\text{Col}(A)$ betecknar kolonnrummet av A . Visa:

(a) Om $\text{Col}(A^k) = \text{Col}(A^{k+1})$ för något heltal $k \geq 1$, så gäller $\text{Col}(A^k) = \text{Col}(A^{k+l})$ för alla heltal $l \geq 1$. **(3 p)**

(b) Om $A^j = 0$ för något heltal $j \geq 1$ så är $A^n = 0$. **(3 p)**



KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
onsdag, 11 januari 2017

1. (a) För vilka värden på k har ekvationssystemet (med avseende på x , y och z)

$$\begin{aligned}kx + ky + z &= 3 \\2x + ky + z &= 2 \\4x + 3y + 3z &= 8\end{aligned}$$

en entydig lösning, ingen lösning, oändligt många lösningar?

(4 p)

- (b) Lös ekvationssystemet för $k = 1$.

(2 p)

Lösningsförslag.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} k & k & 1 & 3 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \mapsto (R_1 - R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} k-2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right]$$

Om $k = 2$ då får vi ur första raden att $0 = 1$ vilket är motsägelse. Om $k \neq 2$ så ger R_1 att $x = 1/(k-2)$. Vi kan alltså dela R_1 med $k-2$ och få

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 2 & k & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \mapsto (R_2 - 2R_1) \quad R_3 \mapsto (R_3 - 4R_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & k & 1 & \frac{2k-6}{k-2} \\ 0 & 3 & 3 & \frac{8k-20}{k-2} \end{array} \right]$$

Om $k = 1$ så ser man att $R_3 = 3R_2$, och eftersom vi får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \mapsto (R_3 - 3R_2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Emellertid är detta skärningen mellan två plan som ger en linje som lösning. Dvs oändlig många lösningar. Vi får alltså att

$$x = -1, \quad y + z = 4$$

som ger $(x, y, z) = (-1, y, 4 - y)$. Väljer vi $y = t$ som parameter får vi $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(0, 1, -1)$.

Om $k \neq 1, 2$ så kan reducera matrisen ovan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & k & 1 & \frac{2k-6}{k-2} \\ 0 & 3 & 3 & \frac{8k-20}{k-2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \mapsto (R_2 - \frac{k}{3}R_3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k-2} \\ 0 & 0 & 1 - k & * \\ 0 & 3 & 3 & \frac{8k-20}{k-2} \end{array} \right]$$

vilket, efter att ha delat rad 2 med $(k-1)$ samt reducerat rad 3, ger en enda lösning.

Svar: a) Om $k \neq 1, 2$ har vi en enda lösning. För $k = 2$ har vi inga lösningar. För $k = 1$ har vi oändligt många lösningar.

Svar: b) Då $k = 1$ har vi en linje som lösning $(x, y, z) = (-1, 0, 4) + t(0, 1, -1)$.

2. P är det plan i \mathbb{R}^3 som innehåller punkten $(1, 0, 0)$ och linjen $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestäm en normalvektor och en ekvation till P .

(3 p)

- (b) Bestäm ortogonalprojektion av punkten $(2, 4, 2)$ på linjen som går genom origo och punkten $(0, 1, -1)$. **(3 p)**

Lösningförslag.

- (a) Eftersom linjen $(x, y, z)^T = t(1, 1, 1)^T$ ligger i planet P , ligger speciellt origo $(0, 0, 0)$ i P . Vektorn $\vec{v} = (1, 0, 0)^T$ från origo till punkten $(1, 0, 0)$ i P är därmed parallell med P , liksom riktningsvektorn $\vec{w} = (1, 1, 1)^T$ för den givna linjen. Det följer att

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en normalvektor till P . Ekvationen för P blir då, om vi använder att origo ligger i P ,

$$\vec{n} \cdot (x - 0, y - 0, z - 0)^T = 0 \iff y - z = 0.$$

- (b) Punkten $(2, 4, 2)$ ska projiceras (ortogonalt) på linjen L , där L är den linje som går igenom origo och genom punkten $(0, 1, -1)$. Detta är ekvivalent med att projicera punktens Ortsvektor $\vec{r} = (2, 4, 2)^T$ på linjens riktningsvektor $\vec{u} = (0, 1, -1)^T$, och vi får

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{0 + 4 - 2}{1^2 + (-1)^2} \vec{u} = \vec{u}.$$

Ortsvektorn \vec{r} för punkten $(2, 4, 2)$ projiceras alltså Ortsvektorn för punkten $(0, 1, -1)$.

3. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen \mathcal{V} till basen \mathcal{W} av ett delrum U av \mathbb{R}^4 .

- (a) Bestäm övergångsmatrisen från bas \mathcal{W} till bas \mathcal{V} . **(3 p)**

- (b) Låt $f: U \rightarrow U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$. **(3 p)**

(Med $[f]_{\mathcal{B}}$ menas matrisen för avbildningen f med avseende på basen \mathcal{B} .)

Lösningförslag.

- (a) Övergångsmatrisen från basen W till basen V ges av inversen till T

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- (b) Vi har

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{V}} &= T^{-1}[f]_{\mathcal{W}}T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 17 & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. En linjär avbildning $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras av formeln $L(\vec{x}) = \vec{e}_3 \times \vec{x}$ för alla vektorer \vec{x} .

Här är $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och med \times menas kryssprodukten.

- (a) Bestäm standardmatris till $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. **(2 p)**

- (b) L transformerar planet $x_3 = 0$ till sig själv. Beskriv geometrisk hur vektorer i detta plan transformerar. **(1 p)**

- (c) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till L . **(3 p)**

Lösningförslag.

(a) Kryssprodukten beräknas och vi får

$$L(x) = \vec{e}_3 \times x = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen ges då av hur L verkar på standardbasen i rummet

$$L(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad L(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad L(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och därmed är dess matris

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Avbildningen skickar alla vektorer till planet $x_3 = 0$, eftersom tredje komponenten i Lx är lika med noll. Vektorer i planet $x_3 = 0$ ges av $(x_1, x_2, 0)$ som avbildas på $(-x_2, x_1, 0)$ dvs (x_1, x_2) avbildas på $(-x_2, x_1)$ som tydligen är en rotation och vi kan skriva

$$\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

som är en rotation med 90° , dvs $\pi/2$.

(c)

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \text{ger} \quad \lambda = 0,$$

så L har bara ett egenvärde $\lambda = 0$. Det betyder att motsvarande egenvektorer ges av de nollskilda vektorerna i $\ker(L)$. Matrisen till L har rang 2, som ger att $\ker(L)$ har dimension 1. Vi kan konstatera att egenvektorer till L ges av $\alpha \vec{e}_3$ där α är en nollskild skalär.

5. Låt Q vara den kvadratiske form på \mathbb{R}^{2n} som är definierad genom

$$Q(x_1, \dots, x_{2n}) = x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \dots + x_n x_{n+1}.$$

(a) Bestäm den symmetriska matrisen som tillhör Q . (2 p)

(b) Avgör karaktären av Q : positivt/negativt (semi)definit eller indefinit? (4 p)

Lösningförslag.

(a) Symmetriska matrisen ges av:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs $A = (a_{ij})$, där $a_{ij} = 1/2$ för

$$(i, j) = (2n, 1), (2n-1, 2), (2n-2, 3), \dots, (2, 2n-1), (1, 2n)$$

(b) Man kan enkelt konstatera att

$$4x_i x_j = [(x_i + x_j)^2 - (x_i - x_j)^2]$$

och att

$$4Q(x) = [(x_1 + x_{2n})^2 - (x_1 - x_{2n})^2] + \dots + [(x_n + x_{n+1})^2 - (x_n - x_{n+1})^2]$$

Dvs efter en rotation med ansatsen $y_1 = x_1 + x_{2n}, \dots, y_n = x_n + x_{n+1}$, samt $y_{n+1} = x_1 - x_{2n}, \dots, y_{2n} = x_n - x_{n+1}$, har vi att kvadratiska formen är indefinit, då den skrivs som

$$4Q(y) = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=n+1}^{2n} y_i^2.$$

6. Låt A vara en $n \times n$ -matris. $\text{Col}(A)$ betecknar kolonnrummet av A . Visa:

- (a) Om $\text{Col}(A^k) = \text{Col}(A^{k+1})$ för något heltal $k \geq 1$, så gäller $\text{Col}(A^k) = \text{Col}(A^{k+l})$ för alla heltal $l \geq 1$. (3 p)
- (b) Om $A^j = 0$ för något heltal $j \geq 1$ så är $A^n = 0$. (3 p)

Lösningförslag.

(a) Beteckna $W_0 = \text{Col}(A^k)$ och $W_1 = \text{Col}(A^{k+1})$. Enligt antagande gäller $W_1 = W_0$. Enligt definitionen för bildrummet,

$$W_1 = \text{Col}(A^{k+1}) = \{A^{k+1}\vec{x}, \vec{x} \in R^n\} = \{A(A^k\vec{x}), \vec{x} \in R^n\} = \{A\vec{y}, \vec{y} \in W_0\}.$$

Eftersom $W_1 = W_0$ har vi

$$(1) \quad \{A\vec{y}, \vec{y} \in W_0\} = W_0.$$

Nu bestämmer vi $\text{Col}(A^{k+2})$:

$$\text{Col}(A^{k+2}) = \{A(A^{k+1}\vec{x}); \vec{x} \in R^n\} = \{A\vec{y}; \vec{y} \in W_1\} \stackrel{W_1=W_0}{=} \{A\vec{y}; \vec{y} \in W_0\} \stackrel{(1)}{=} W_0.$$

Alltså $\text{Col}(A^{k+2}) = W_0 = \text{Col}(A^k)$.

På samma sätt

$$\text{Col}(A^{k+3}) = \{A(A^{k+2}\vec{x}); \vec{x} \in R^n\} = \{A\vec{y}; \vec{y} \in \text{Col}(A^{k+2})\} = \{A\vec{y}; \vec{y} \in W_0\} \stackrel{(1)}{=} W_0.$$

Om vi fortsätter med samma resonemang får vi att

$$\text{Col}(A^{k+l}) = W_0 = \text{Col}(A^k), \quad \text{V.S.B}$$

(b) Om $A^j = 0$ för något heltal $j \geq 1$ då är $A^{j+k} = A^k A^j = 0$ för varje $k = 0, 1, 2, \dots$. Låt m vara minst av alla tal l sådana att $A^l = 0$. Då är $A^m = 0$ medan $A^{m-1} \neq 0$. Därför finns det en vektor \vec{v} sådan att $A^{m-1}\vec{v} \neq \vec{0}$. Vi ska visa att följande vektorer $\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots, A^{m-1}\vec{v}$ är linjärt oberoende. Låt

$$(2) \quad c_0\vec{v} + c_1A\vec{v} + \dots + c_{m-1}A^{m-1}\vec{v} = \vec{0}$$

Vi multiplicerar ovanstående relation från vänster med A^{m-1} . Eftersom $A^l = 0$ för $l \geq m$ får vi $c_0A^{m-1}\vec{v} = \vec{0}$. Detta och $A^{m-1}\vec{v} \neq \vec{0}$ medför $c_0 = 0$. Ekvationen (2) förenklas till

$$c_1A\vec{v} + \dots + c_{m-1}A^{m-1}\vec{v} = \vec{0}.$$

Multiplikationen med A^{m-2} ger $c_1 = 0$. Fortsättning med samma resonemang ger $c_2 = 0, \dots, c_{m-1} = 0$, som betyder att $\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots, A^{m-1}\vec{v}$ är m stycken linjärt oberoende vektorer i ett n -dimensionellt vektorrum. Därför $m \leq n$. Slutligen $A^n = A^m A^{n-m} = 0 \cdot A^{n-m} = 0$ V.S.B.