KTH Matematik

Tentamen i kurs SF1624 Algebra och geometri.
Fredagen den 13 mars 2009 kl 0800-1300.

Tentamen består av fyra 3-poängsuppgifter och fyra 4-poängsuppgifter.
För godkänt betyg (E) krävs minst 14 poäng. För de högre betygen D, C, B och A gäller betygsgränserna 17, 20, 23 resp 25 poäng.
Du som uppnår 13 poäng erhåller betyg Fx och kommer att erbjudas en kompletteringstentamen. Kontakta då den kursansvarige läraren för vidare information.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Godkänt resultat på kontrollskrivning n (n=1,2,3,4) ger 3 poäng på tentamensuppgift nr n som då inte skall behandlas.
Ordentliga motiveringar krävs. Inga hjälpmedel är tillåtna. Lycka till!

3-poängsuppgifter

1. Ekvationen $z^3 + (1-3i)z^2 - (1-4i)z + 5 - i = 0$ har en rot $z = i$. Bestäm ekvationens samtliga rötter. Ledning: $\sqrt{625} = 25$.

2. Bestäm den räta linje i planet $x + 2y - z = 2$ som skär linjen $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ under rät vinkel.

3. Låt $S_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Visa att denna mängd vektorer duger som bas i $\mathbf{R}^3$ för alla värden på det reella talet a. Bestäm också koordinaterna för vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ i basen S_1.

4. Avgör vilka av vektorerna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som är egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Är matrisen diagonaliserbar? Motivera!

4-poängsuppgifter

5. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + (a^2+1)y + \quad az = 1 \\ x + \quad 2y + \quad az = 1 \\ 2x + \quad 4y + (1+3a)z = 0 \end{cases}$$

för alla värden på det reella talet a .

6. Bestäm den reella konstanten a så att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & a \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

blir diagonaliserbar med hjälp av en ON-matris. Bestäm även en ON-matris som diagonaliserar A och ange motsvarande diagonalmatris.

7. Visa med hjälp av induktion att $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$ för $n \geq 2$.

8. För den linjära operatorn T på $\mathbf{R}^3$ gäller att

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Undersök om det finns vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ och $\overline{w}$ sådana att

$$T(\overline{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; T(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } T(\overline{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm i så fall alla sådana vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ och $\overline{w}$.

Lösningar till tentamen i kurs SF1624 Algebra och geometri 090313.

3-poängsuppgifter

1. Division med $z-i$ ger faktorn $z^2+(1-2i)z+1+5i$. Vi söker nollställena :

Kvadratkomplettering ger $(z+\frac{1}{2}(1-2i))^2=-\frac{7}{4}-6i$.

Låt $z+\frac{1}{2}(1-2i)=w=x+iy$ (1). Detta ger systemet $\begin{cases} x^2-y^2=-\frac{7}{4} & (2) \\ 2xy=-6 & (3) \\ x^2+y^2=\left|w^2\right|=\frac{25}{4} & (4) \end{cases}$

$(2)+(4)\Rightarrow 2x^2=\frac{18}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}$ $\quad (4)-(2)\Rightarrow 2y^2=\frac{32}{4}\Rightarrow y=\pm 2$. (3) ger att x och y

har olika tecken dvs $w_1=\frac{3}{2}-2i$, $w_2=-\frac{3}{2}+2i)$. (1) ger slutligen $\begin{cases} z_1=1-i \\ z_2=-2+3i \end{cases}$

2. Skärningspunkten mellan den givna linjen och planet fås:
$-3+2t+2(-3+t)-(-1-t)=2\Rightarrow t=2$. Det ger skärningspunkten (1,-1,-3). Den

sökta linjen är ortogonal mot den givna linjens riktningsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ och mot

planets normalvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Som riktningsvektor för den sökta linjen kan vi då ta

vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Den sökta linjen ges då av

$$\begin{cases} x= 1+t \\ y=-1+t \\ z=-3+3t \end{cases}$$

3. Mängden duger som bas om och endast om följande determinant är skild från 0:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+1\neq 0$ för alla reella a. $S_1=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Vi söker koefficienter a, b, c så att $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Detta ger systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \;\;2 \\ c = \;\;1 \end{cases}$$

4. $\bar{v}$ är en egenvektor till matrisen A om $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ där λ är en skalär.

$$A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\; A\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix},\; A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-3\end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\; A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Det betyder att alla utom vektorn $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ är egenvektorer till matrisen. Vi ser också att egenvärdena är 1, 2 och 3. Då dessa är olika är matrisen diagonaliserbar.

4-poängsuppgifter

5. $$\begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & 4 & 1+3a & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-a^2) & 1+a & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & a^2+1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & -2 \end{bmatrix}$$

Vi ser att för a = -1,1 är koefficientmatrisens determinant noll och entydig lösning kan ej erhållas. Vi får tre fall:

$a \neq \pm 1$: $z = -\dfrac{2}{1+a}$, $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1+3a}{1+a}$ dvs entydig lösning

$a = 1$: $z = -1$, $y = t \Rightarrow x = 2 - 2t$, $-\infty < t < +\infty$ dvs oändligt många lösningar

$a = -1$: Sista ekvationen ger 0 = -2 dvs lösning saknas.

6. A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är symmetrisk. Det ger a = 2. Låt P vara den matris som diagonaliserar A ortogonalt. Kolumnerna i den är ortonormala egenvektorer till A. Karakteristisk ekvation är

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-10) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,1,10.$$

Egenvektorerna söks:

$$\lambda=10:\ \begin{bmatrix}-5 & 4 & 2 & 0\\ 4 & -5 & 2 & 0\\ 2 & 2 & -8 & 0\end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = t \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} t \ .$$

$$\lambda=1:\ \begin{bmatrix}4 & 4 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -s - \frac{t}{2} \\ x_2 = \ s \\ x_3 = \ \ t \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} s + \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix} t \ .$$

Alla vektorer i det plan som spänns av de två vektorerna är egenvektorer med egenvärde 1 .

Vi får en vektor i detta plan som är ortogonal mot $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ om vi bildar kryssprodukten med en egenvektor ur det ortogonala egenrummet med $\lambda = 10$:

$$\begin{vmatrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z\\ 2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Som de två första kolumnerna i matrisen P kan vi då välja $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ och $\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix}$.

Det ger matrisen $P = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-3 & -1 & 2\sqrt{2}\\ 3 & -1 & 2\sqrt{2}\\ 0 & 4 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$. Motsvarande diagonalmatris är

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}.$$

7. Låt $P(n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} = 1 - \frac{1}{n^2}$. $P(2): VL = \frac{3}{4} = HL$ dvs $P(2)$ är sann.

Vi antar nu att påståendet är sant för ett fixt men godtyckligt valt n och visar att det då är sant för $n + 1$:

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{(k-1)^2 k^2} + \frac{2(n+1)-1}{(n+1-1)^2 (n+1)^2} = \{induktionsantagande\} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} = 1 + \frac{2n+1-(n+1)^2}{n^2 (n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \ .$$

Då är $P(n)$ sant för $n \geq 2$ enligt induktionsprincipen.

8. Vi använder att kolumnerna i en operators standardmatris ges av operatorns verkan på standardbasvektorerna. Om T har invers fås direkt att

$$\bar{u} = T^{-1}T(\bar{u}) = T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \bar{v} = T^{-1}T(\bar{v}) = T^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \bar{w} = T^{-1}T(\bar{w}) = T^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$ Det

betyder att de sökta vektorerna är kolumnerna i operatorns inversmatris. Då inversen är entydig kan det inte finnas fler sådana vektorer. Det återstår att visa att T har invers. Vi söker operatorns standardmatris:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = T(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = T(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = T\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - 3T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-5\\-2\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Det ger standardmatrisen $\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\3 & -5 & 1\\3 & -2 & 0\end{bmatrix}$. Inversen till denna är $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\3 & -3 & 1\\9 & -2 & -4\end{bmatrix}$.

De sökta vektorerna är alltså $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\3\\9\end{pmatrix}$, $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix}$ och $\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$.