



KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri**  
**Tentamen**  
**Torsdag, 17 mars 2016**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL A

1. Linjen  $L_1$  ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och linjen  $L_2$  ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm i parameterform det plan  $\Pi$  som är parallellt med linjen  $L_1$  och innehåller linjen  $L_2$ . **(2 p)**  
(b) Bestäm avståndet mellan linjerna  $L_1$  och  $L_2$ . **(2 p)**

2. Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla egenvektorer till egenvärdena  $-1$  och  $2$ . **(3 p)**  
(b) Varför är matrisen  $A$  diagonaliserbar? **(1 p)**

3. Den kvadratiska formen  $Q$  på  $\mathbb{R}^2$  ges av

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

- (a) Ange den symmetriska matris  $A$  som uppfyller  $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ . **(1 p)**  
(b) Avgör om  $Q$  är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit. **(3 p)**

## DEL B

4. Låt  $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

- (a) Låt  $L$  vara linjen som ges av  $2x - 3y = -11$ . Visa att  $T_A$  avbildar  $L$  på en linje  $T_A(L)$ . **(2 p)**
- (b) Hitta en linje  $L'$  så att  $T_A(L')$  är en punkt. Ange ekvation för  $L'$ . **(2 p)**

5. I  $\mathbb{R}^4$  har vi följande fyra vektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektorrummet  $V = \text{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

- (a) Visa att  $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  är en ortogonal bas för  $V$ . **(1 p)**
- (b) Vi har basen  $\gamma = \{\vec{v}, \vec{w}\}$  för  $V$ . Bestäm koordinatvektorn till  $\text{Proj}_V(\vec{x})$  i basen  $\gamma$ . **(3 p)**

6. Låt  $A$  vara en symmetrisk  $3 \times 3$ -matris. Anta att dess karakteristiska polynom har en enkel

rot  $\lambda_1 = 2$  med motsvarande egenvektor  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  och en dubbelrot  $\lambda_2 = -2$ .

- (a) Låt  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Beräkna  $A^5 \vec{w}$ . **(2 p)**
- (b) Bestäm matrisen  $A$ . **(2 p)**

*Var god vänd!*

## DEL C

7. Planen  $P_1$  och  $P_2$  i  $\mathbb{R}^3$  ges av ekvationerna:

$$P_1: x - y + z = 5 \quad P_2: 2x + 2z = -8$$

Linjen  $L$  är  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ , godtyckliga tal  $t$ . Linjen  $L$  speglas genom  $P_1$  till en linje  $L'$ .

Avgör om  $L'$  skär planet  $P_2$ . **(4 p)**

8. Låt

$$\beta = \{\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(10x), \sin(10x)\}.$$

Mängden  $\beta$  bildar en bas för ett delrum  $V$  av vektorrummet av reellvärda funktioner av en variabel  $x$ . Derivationsavbildningen  $D: V \rightarrow V$  är den linjära avbildning som skickar en vektor  $f(x)$  i  $V$  till

$$D(f(x)) = \frac{df}{dx},$$

dess derivata.

(a) Hitta matrisrepresentationen till  $D$  i basen  $\beta$ . **(2 p)**

(b) Avgör om avbildningen  $D$  är diagonaliserbar. **(2 p)**

9. Låt  $A$  och  $P$  vara  $3 \times 3$ -matriser, där  $P$  är inverterbar.

(a) Visa att  $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP)$ , där  $\text{tr}$  betecknar spåret av matrisen. **(2 p)**

(b) Antag att  $A$  är diagonaliserbar och uppfyller följande tre villkor

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= 0, \\ \text{tr}(A^2) &= 14, \\ \text{tr}(A^3) &= -18. \end{aligned}$$

Beräkna  $\det(A)$ . **(2 p)**



KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri**  
**Tentamen**  
**Torsdag, 17 mars 2016**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL A

1. Linjen  $L_1$  ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och linjen  $L_2$  ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestäm i parameterform det plan  $\Pi$  som är parallellt med linjen  $L_1$  och innehåller linjen  $L_2$ . **(2 p)**  
 (b) Bestäm avståndet mellan linjerna  $L_1$  och  $L_2$ . **(2 p)**

a) Varje plan som har riktningsvektorn  $[-2 \ -1 \ 1]^T$  till  $L_1$  som en av sina riktningsvektorer är parallellt med  $T_1$ . Därför är

$$\Pi: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en beskrivning av  $\Pi$  i parameterform.

b) Punkten  $Q = [-1 \ -3 \ 0]^T$  är på linjen  $L_1$  och punkten  $P = (4 \ 2 \ 3)^T$  är på linjen  $L_2$ . Då linjen  $L_2$  ligger i planet  $\Pi$ , följer det att avståndet mellan  $L_1$  och  $L_2$  är längden av vektorn  $\text{proj}_{\vec{n}} \vec{PQ}$  - projektionen av  $\vec{PQ}$  till normalvektorn  $\vec{n}$  av planet  $\Pi$ . Normalvektorn ges av

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

För att förenkla beräkningarna ska vi skala  $\vec{n}$  och ta  $\vec{n} = [-2 \ 1 \ -3]^T$ . Vektorn

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Av projektionsformeln har vi att

$$\text{proj}_{\vec{n}} \vec{PQ} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Vi har att  $\|\vec{n}\|^2 = 4 + 1 + 9 = 14$ , och att  $\vec{PQ} \cdot \vec{n} = 10 - 5 + 9 = 14$ . Det följer nu att den sökta längden är  $\|\vec{n}\| = \sqrt{14}$ .

2. Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla egenvektorer till egenvärdena 1 och  $-2$ . **(3 p)**  
 (b) Varför är matrisen  $A$  diagonaliserbar? **(1 p)**

a) Egenvektorerna tillhörande egenvärdet  $\lambda = -1$  ges som nollskilda vektorer i nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Med andra ord planet som ges av ekvationen  $x + y = 0$ . Egenvektorerna är följaktligen

$$t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

för alla talpar  $(t, s) \neq (0, 0)$ .

Egenvektorerna till egenvärdet  $\lambda = 2$  ges av nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi kan stryka rad 2, och utföra de vanliga radoperationerna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att egenvektorerna är  $t \cdot [2 \ -1 \ 1]^T$ , med nollskilda tal  $t$ .

b) Dimensionerna av egenrummen summerar till tre.

3. Den kvadratiske formen  $Q$  på  $\mathbb{R}^2$  ges av

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

- (a) Ange den symmetriska matris  $A$  som uppfyller  $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ . **(1 p)**  
 (b) Avgör om  $Q$  är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit. **(3 p)**

a) Den kvadratiske formen  $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  kan skrivas som

$$\vec{x}^T A \vec{x},$$

med den symmetriska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Egenvärdena till matrisen  $A$  ges som nollställena av

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4}.$$

Vi löser ekvationen  $(\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4} = 0$  och erhåller att

$$\lambda - 1 = \pm \frac{1}{2}.$$

Detta ger egenvärdena  $\frac{1}{2}$  och  $\frac{3}{2}$ . Då alla egenvärdena är positiva, har vi att den kvadratiska formen är positivt definit.

---



## DEL B

4. Låt  $T_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildning som har standardmatris

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

- (a) Låt  $L$  vara linjen som ges av  $2x - 3y = -11$ . Visa att  $T_A$  avbildar  $L$  på en linje  $T_A(L)$ . **(2 p)**  
 (b) Hitta en linje  $L'$  så att  $T_A(L')$  är en punkt. Ange ekvation för  $L'$ . **(2 p)**

a) Matrisen  $A$  har rang 1 och därför är bilden  $\text{Range}(T_A)$  en linje. Bilden  $T_A(L)$  är antingen en enkel punkt eller denna linje. Vi måste utsluta att  $T_A(L)$  är bara en punkt. Det räcker att betrakta punkterna

$$P = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad Q = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Båda punkterna ligger på  $L$ . Men

$$T_A(P) = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}, \quad \text{medan} \quad T_A(Q) = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Därför består bilden av minst två punkter.

b) Nollrummet till  $T_A$  ges av matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Detta ger ekvationen  $-x + 3y = 0$ . Detta är en linje, och per definition skickas denna linje till punkten  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

5. I  $\mathbb{R}^4$  har vi följande fyra vektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektorrummet  $V = \text{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

- (a) Visa att  $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  är en ortogonal bas för  $V$ . **(1 p)**  
 (b) Vi har basen  $\gamma = \{\vec{v}, \vec{w}\}$  för  $V$ . Bestäm koordinatvektorn till  $\text{Proj}_V(\vec{x})$  i basen  $\gamma$ . **(3 p)**

a) Vektorerna  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  är ortogonala då  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , och följdaktligen är de linjärt oberoende. Vi har vidare att

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = -2\vec{u} + \vec{v},$$

och det följer nu att  $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  är en ortogonal bas för vektorrummet  $V$ .

b) Vi har att  $\|\vec{u}\| = \sqrt{6}$  och att  $\|\vec{v}\| = \sqrt{7}$ . Vi har därmed att  $\{\frac{\vec{u}}{\sqrt{6}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{7}}\}$  är en ortonormal bas för  $V$ . Detta ger att

$$\text{proj}_V(\vec{x}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\vec{u}}{\sqrt{6}} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\vec{v}}{\sqrt{7}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{6} \cdot \vec{u} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{7} \cdot \vec{v}.$$

Vi har att  $\vec{u} \cdot \vec{x} = 1 + 2 - 1 = 2$ , och att  $\vec{v} \cdot \vec{x} = -1 + 2 + 1 + 1 = 3$ . Detta ger att

$$\text{proj}_V(\vec{x}) = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{3}{7}\vec{v}.$$

Tidigare har vi räknat ut att  $\vec{w} = -2\vec{u} + \vec{v}$ , vilket ger att

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}.$$

Insätter vi detta i vårt uttryck för  $\text{proj}_V(\vec{x})$  erhåller vi att

$$\text{proj}_V(\vec{x}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}\right) + \frac{3}{7}\vec{v} = \frac{7+18}{42}\vec{v} - \frac{1}{6}\vec{w}.$$

Koordinatvektorn i den sökta basen blir då  $\begin{bmatrix} \frac{25}{42} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ .

6. Låt  $A$  vara en symmetrisk  $3 \times 3$ -matris. Anta att dess karakteristiska polynom har en enkel

rot  $\lambda_1 = 2$  med motsvarande egenvektor  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  och en dubbelrot  $\lambda_2 = -2$ .

(a) Låt  $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Beräkna  $A^5\vec{w}$  (2 p)

(b) Bestäm matrisen  $A$ . (2 p)

a) Då matrisen  $A$  är symmetrisk vet vi att egenrummen är ortogonala, och att egenvektorerna spänner upp hela rummet. Vektorn  $\vec{w} = [3 \ -3 \ 0]^T$  är ortogonal mot egenvektorn  $[1 \ 1 \ -1]^T$ , och därför är  $\vec{w}$  en egenvektor. Egenvärdet är  $-2$ . Detta ger att

$$A^5\vec{w} = (-2)^5\vec{w} = -32 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Egenrummet  $E_2$  tillhörande egenvärdet  $\lambda = 2$  spänns upp av  $[1 \ 1 \ -1]^T$ . Vi har att egenrummet  $E_{-2}$  tillhörande egenvärdet  $\lambda = -2$  ges av ekvationen  $x + y - z = 0$ .

En ortogonal bas för  $E_{-2}$  är  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ . En ortonormal bas av egenvektorer ges därmed av vektorerna

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har vidare att  $A = PDP^{-1}$ , där  $D$  är diagonalmatrisen med egenvärdena på diagonalen, och matrisen  $P$  har som kolonner en bas av egenvektorer. Vi väljer kolonnerna i  $P$  att vara de ortonormala egenvektorerna ovan, vilket ger att

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{2}{2} - \frac{2}{6} & \frac{2}{3} + \frac{2}{2} - \frac{2}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{4}{6} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{2} - \frac{2}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{2}{2} - \frac{2}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{4}{6} \\ -\frac{2}{3} - \frac{4}{6} & -\frac{2}{3} - \frac{4}{6} & \frac{2}{3} - \frac{8}{6} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Var god vänd!*

## DEL C

7. Planen  $P_1$  och  $P_2$  i  $\mathbb{R}^3$  ges av ekvationerna:

$$P_1 : x - y + z = 5 \quad P_2 : 2x + 2z = -8$$

Linjen  $L$  är  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ , godtyckliga tal  $t$ . Linjen  $L$  speglas genom  $P_1$  till en linje  $L'$ . Avgör om  $L'$  skär planet  $P_2$ . (4 p)

Vi bestämmer först skärningen mellan linjen  $L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ 3 \\ 4t \end{bmatrix} \right\}$  och planet  $P_1 : x - y = z = 5$ . Insättning ger  $1 + 2t - 3 + 4t = 5$ , vilket betyder att  $6t = 7$ , det vill säga  $t = \frac{7}{6}$ . Skärningspunkten  $P$  har koordinater

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \frac{7}{3} \\ 3 \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix}.$$

En riktningsvektor för linjen  $L$  är vektorn  $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ , och en normalvektor för planet  $P_1$  är

$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Vi har, av figur t.ex., att

$$\text{proj}_{\vec{n}} \vec{v} + -1 \cdot (v - \text{proj}_{\vec{n}} \vec{v}) = 2 \text{proj}_{\vec{n}} \vec{v} - \vec{v}$$

är en riktningsvektor för den speglade linjen  $L'$ . Vi har att

$$\text{proj}_{\vec{n}} \vec{v} = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{2 + 4}{3} \vec{n}.$$

Detta ger att

$$2 \text{proj}_{\vec{n}} \vec{v} - \vec{v} = 4\vec{n} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 - 2 \\ -4 - 0 \\ 4 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

är en riktningsvektor för  $L'$ . Vi har att  $L'$  går genom  $P$ , sådan att linjen

$$L' = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{14}{3} \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Insätter vi parameterbeskrivningen av  $L'$  i ekvationen för planet  $P_2$ , erhåller vi

$$2\left(\frac{10}{3} + 2t\right) + 2\left(\frac{14}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{28}{3} + 4t = -8,$$

vilket har lösning, och vi har att speglingen  $L'$  skär planet  $P_2$ .

8. Låt

$$\beta = \{\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(10x), \sin(10x)\}.$$

Mängden  $\beta$  bildar en bas för ett delrum  $V$  av vektorrummet av reellvärda funktioner av en variabel  $x$ . Derivationsavbildningen  $D: V \rightarrow V$  är den linjära avbildning som skickar en vektor  $f(x)$  i  $V$  till

$$D(f(x)) = \frac{df}{dx},$$

dess derivata.

- (a) Hitta matrisrepresentationen till  $D$  i basen  $\beta$ . (2 p)  
 (b) Avgör om avbildningen  $D$  är diagonaliserbar. (2 p)

Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos(nx)) &= -n \sin(nx) \quad \text{och att} \\ \frac{d}{dx}(\sin(nx)) &= n \cos(nx). \end{aligned}$$

Matrisrepresentationen av derivationsavbildningen i basen  $\beta$  blir då

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vi bestämmer först det karakteristiska polynomet till derivationsavbildningen, det vill säga  $\det(\lambda I - D)$ . Vi noterar att determinanten till ett block på formen

$$\begin{bmatrix} \lambda & -n \\ n & \lambda \end{bmatrix}$$

är  $(\lambda^2 + n^2)$ . Det följer att det karakteristiska polynomet till  $D$  är

$$(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 4) \cdots (\lambda^2 + 10^2),$$

som inte har några reella nollställen. Avbildningen är speciellt inte diagonaliserbar.

9. Låt  $A$  och  $P$  vara  $3 \times 3$ -matriser, där  $P$  är inverterbar.

- (a) Visa att  $\text{tr}(A) = \text{tr}(P^{-1}AP)$ , där  $\text{tr}$  betecknar spåret av matrisen. (2 p)

(b) Antag att  $A$  är diagonaliserbar och uppfyller följande tre villkor

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A) &= 0, \\ \operatorname{tr}(A^2) &= 14, \\ \operatorname{tr}(A^3) &= -18.\end{aligned}$$

Beräkna  $\det(A)$ .

**(2 p)**

a) Det karakteristiska polynomet till  $A$  är på formen

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - c_1\lambda^2 + c_2\lambda - c_3.$$

Lite eftertanke ger att  $c_1$  är spåret till matrisen. För att lösa uppgiften är det därför nog om vi påvisar att similära matriser har samma karakteristiska polynom. Vi har följande identitet av matriser,

$$\lambda I - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)P.$$

Detta ger att det karakteristiska polynomet till  $P^{-1}AP$  är

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}) \det(\lambda I - A) \det(P) \\ &= \det(\lambda I - A).\end{aligned}$$

Detta betyder att similära matriser har samma karakteristiska polynom, och vi har visat påståendet.

b) Vi kan anta från uppgift a) att  $A$  är en diagonalmatris. Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara diagonalelementen i  $A$ . Vi vill beräkna

$$\det(A) = abc.$$

Vi har att  $a + b + c = 0$ , att  $a^2 + b^2 + c^2 = 14$  och att  $a^3 + b^3 + c^3 = -18$ . Den första ekvationen ger att  $c = -a - b$ , och att

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{och att} \quad c^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3.$$

Kombinerar vi detta med den tredje ekvationen, har vi vidare att

$$-18 = a^3 + b^3 + c^3 = -3(a^2b + ab^2).$$

Determinanten  $abc = ab(-a - b) = -(a^2b + ab^2)$  är därmed  $-6$ .