KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Torsdag, 9 juni 2016

Skrivtid: 08:00–13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Planet H_1 ges av ekvationen $3x+2y+2z=0$, och H_2 ges av ekvationen $x+2y-2z=0$. Linjen L är skärningen av H_1 och H_2.
   (a) Bestäm en bas för skärningslinjen L. **(2 p)**
   (b) Avgör om linjen L är med i delrummet $V = \text{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, där **(2 p)**

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Klimatstatistiken visar att vintermedeltemperaturen i Stockholms län förändras enligt följande tabell (temperaturen är avrundat till heltal grader)

Period 0 (1961-1970)	$-5°C$
Period 1 (1971-1980)	$-2°C$
Period 2 (1981-1990)	$-3°C$
Period 3 (1991-2000)	$-1°C$
Period 4 (2001-2010)	$-1°C$

   Bestäm en funktion på formen $T(k) = Ak + B$ som stämmer bäst med dessa värden i minstakvadratmening. Här är k nummer av perioden och $T(k)$ är medeltemperaturen i period k.
   (4 p)

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen A. **(2 p)**
   (b) Beräkna $A^{11}\vec{v}$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

DEL B

4. Låt U vara lösningsmängden, i $\mathbb{R}^3$, av ekvationen $2x + y = 0$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 115 \end{bmatrix}$.
   (a) Bestäm en ortonormalbas β till U **(2 p)**
   (b) Utvidga basen β till en ortonormalbas för $\mathbb{R}^3$. **(1 p)**
   (c) Bestäm vektorn $\mathrm{proj}_U(\vec{v})$. **(1 p)**

5. Finns det något värde på a för vilket de tre planen
$$ax + y - z = 1, \quad y + 2z = 7, \quad x + z = 2,$$
har en rät linje gemensam? Bestäm i så fall för alla sådana a denna linjes ekvation på parameterform. **(4 p)**

6. Avbildningen $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en rotation med följande egenskaper: rotationsaxeln l är linjen $x_1 = x_2 = x_3$; positiva x_1-axeln avbildas till positiva x_2-axeln; positiva x_2-axeln avbildas till positiva x_3-axeln; positiva x_3-axeln avbildas till positiva x_1-axeln.
   (a) Bestäm matrisrepresentationen av avbildningen R i standardbas. **(1 p)**
   (b) Bestäm alla egenvärdena och egenvektorer av avbildningen. **(1 p)**
   (c) I planet som är vinkelrätt mot linjen l verkar avbildningen R som en rotation. Bestäm rotationsvinkeln. **(2 p)**

Var god vänd!

Del C

7. (a) Bestäm en 2×2-matris A vars nollrum och kolonnrum överensstämmer. **(2 p)**
   (b) Visa att det inte finns någon 3×3-matris med ovanstående egenskap. **(2 p)**

8. Bestäm vilka samband mellan talen a, b, c som krävs för att matrisen
$$\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$
blir diagonaliserbar. **(4 p)**

9. Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum och $L\colon V \to V$ en linjär avbildning som uppfyller att $L(L(v)) = L(v)$ för alla $v \in V$.
   (a) Visa att den enda vektor som ligger i både $\mathrm{Range}(L)$ och $\mathrm{Null}(L)$ är nollvektorn. **(2 p)**
   (b) Visa att det finns en bas $\mathcal{B}$ till V sådant att matrisrepresentationen av L m.a.p. basen $\mathcal{B}$ är en diagonalmatris där alla diagonalelement är antingen 0 eller 1. **(2 p)**

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Torsdag, 9 juni 2016

Skrivtid: 08:00–13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

Del A

1. Planet H_1 ges av ekvationen $3x+2y+2z=0$, och H_2 ges av ekvationen $x+2y-2z=0$. Linjen L är skärningen av H_1 och H_2.
   (a) Bestäm en bas för skärningslinjen L. **(2 p)**
   (b) Avgör om linjen L är med i delrummet $V = \text{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, där **(2 p)**

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) För att bestämma L löser vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y-2z &= 0 \\ 3x+2y+2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2z &= 0 \\ -4y+8z &= 0 \end{cases}.$$

Härav

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså är $L = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$. Därmed bildar vektorn $\vec{f} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en bas för L.

(b) Linjen L är en del av delrummet $V = \text{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ om och endast om basvektorn $\vec{f}$ ligger i V dvs om och endast om $\vec{f}$ är en linjär kombination av vektorerna $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Ekvationen

$$x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w} = \vec{f}$$

ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+x_3 &= -2 \\ 2x_2-2x_3 &= 2 \\ x_1+x_2 &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 &= 1 \\ 2x_2-2x_3 &= 2 \\ 4x_1+3x_2+x_3 &= -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 &= 1 \\ x_2-x_3 &= 1 \\ -x_2+x_3 &= -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2 &= 1 \\ x_2-x_3 &= 1 \\ 0 &= -5. \end{cases}$$

Eftersom systemet saknar lösning ligger inte $\vec{f}$ i V. Därmed är linjen L **inte** en del av delrummet V.

2. Klimatstatistiken visar att vintermedeltemperaturen i Stockholms län förändras enligt följande tabell (temperaturen är avrundat till heltal grader)

Period 0 (1961-1970)	$-5°C$
Period 1 (1971-1980)	$-2°C$
Period 2 (1981-1990)	$-3°C$
Period 3 (1991-2000)	$-1°C$
Period 4 (2001-2010)	$-1°C$

Bestäm en funktion på formen $T(k) = Ak + B$ som stämmer bäst med dessa värden i minstakvadratmening. Här är k nummer av perioden och $T(k)$ är medeltemperaturen i period k.

(4 p)

Vi substituerar mätdata i ekvationen $Ak + B = T(k)$ och för följande ekvationssystem

$$\begin{aligned} 0A + B &= -5 \\ 1A + B &= -2 \\ 2A + B &= -3 \\ 3A + B &= -1 \\ 4A + B &= -1. \end{aligned}$$

Detta kan skrivas på matrisformen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationen fås genom att vi multiplicerar båda leden, från vänster, med systemmatrisens transponat. Dvs vi får

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Detta ger oss

$$\begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -12 \end{bmatrix},$$

som har lösningen $A = 9/10$, $B = -21/5$.

Därmed blir $T(k) = \frac{9}{10}k - \frac{21}{5}$

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen A. **(2 p)**

(b) Beräkna $A^{11}\vec{v}$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Egenvärdena får vi genom att lösa den karakteristiska ekvationen:
$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (3-\lambda) & -4 & 8 \\ 2 & (-3-\lambda) & 8 \\ 0 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0.$$
Alltså har matrisen A två egenvärden, $\lambda_1 = 1$ (dubbelrot till ekvationen) och $\lambda_2 = -1$.
De egenvektorer som hör till egenvärdet $\lambda_1 = 1$ får vi genom att lösa $(A - \lambda_1 I)\vec{u} = \vec{0}$ dvs.
$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 2 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Detta gör systemet
$$\begin{cases} 2x - 4y + 8z & = 0 \\ 2x - 4y + 8z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}.$$
Härav
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Egenvektorerna som hör till egenvärdet $\lambda_1 = 1$ är alla vektorer av typ $s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ där $s \neq 0$ eller $t \neq 0$.
På samma sätt får vi de egenvektorer som hör till $\lambda_2 = -1$:
$$(A - \lambda_2 I)\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Detta gör systemet

$$\begin{cases} 4x - 4y + 8z & = 0 \\ 2x - 2y + 8z & = 0 \\ 2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z & = 0 \\ 0 & = 0 \\ z & = 0 \end{cases}.$$

Härav

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektorerna som hör till egenvärdet $\lambda_2 = -1$ är alla vektorer av typ $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ där $t \neq 0$.

(b) Först diagonaliserar vi matrisen A:

$$A = PDP^{-1} \text{ där } P = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Härav $A^{11} = PD^{11}P^{-1}$, men eftersom

$$D^{11} = \begin{bmatrix} 1^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{11} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

har vi $A^{11} = PD^{11}P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Därmed $A^{11}\vec{v} = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Del B

4. Låt U vara lösningsmängden, i $\mathbb{R}^3$, av ekvationen $2x + y = 0$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 115 \end{bmatrix}$.

   (a) Bestäm en ortonormalbas β till U **(2 p)**

   (b) Utvidga basen β till en ortonormalbas för $\mathbb{R}^3$. **(1 p)**

   (c) Bestäm vektorn $\text{proj}_U(\vec{v})$. **(1 p)**

(a) En parametrisering av planet ges av $(x, y, z) = (1, -2, 0)t + (0, 0, 1)s$. Dvs vektorerna $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$ är en bas for U. Vi observerar direkt att $v_1 \cdot v_2 = 0$, dvs dessa är ortogonala. Det räcker nu att dela varje vektor med sin längd för att ortonormalisera detta. Svar:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \qquad u_2 = (0, 0, 1).$$

(b) För utvidgning till $\mathbb{R}^3$ behöver vi hitta ytterligare en vektor som är ortogonal till u_1, u_2, dvs ortogonal mot planet. Detta ges av normalen till planet, dvs $v_3 = (2, 1, 0)$, som kan då delas med sin längd för att få längd ett. Svar:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0), \qquad u_2 = (0, 0, 1), \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0),$$

(c) Projektionen ges av

$$\text{Proj}_U\, v = (u_1 \cdot v)u_1 + (u_2 \cdot v)u_2,$$

där

$$u_1 \cdot v = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0) \cdot (1, 0, 115) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad u_2 \cdot v = (0, 0, 1) \cdot (1, 0, 115) = 115$$

Vi får då

$$\text{Proj}_U\, v = \frac{1}{\sqrt{5}}u_1 + 115u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0) + 115(0, 0, 1) = (\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, 115)$$

5. Finns det något värde på a för vilket de tre planen

$$ax + y - z = 1, \quad y + 2z = 7, \quad x + z = 2,$$

har en rät linje gemensam? Bestäm i så fall för alla sådana a denna linjes ekvation på parameterform. **(4 p)**

Planens gemensamma punkter får vi genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + y - z &= 1 \\ y + 2z &= 7 \\ x + z &= 2. \end{cases}$$

Låt A vara systemets koefficientmatris. Då är

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a + 3.$$

Om $\det(A) \neq 0$ har systemet exakt en lösning och därmed har planen en gemensam punkt. Därför undersöker vi fallet

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = -3.$$

För $a = -3$ har vi följande ekvationssystem

$$\begin{cases} -3x + y - z &= 1 \\ y + 2z &= 7 \\ x + z &= 2 \end{cases} \text{(ekv1 och ekv3 byter plats)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= 2 \\ y + 2z &= 7 \\ -3x + y - z &= 1 \end{cases}$$

$$\text{(3*ekv1 + ekv3)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= 2 \\ y + 2z &= 7 \\ y + 2z &= 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z &= 2 \\ y + 2z &= 7 \\ 0 &= 0. \end{cases}$$

Härav $z = t, y = 7 - 2t, x = 2 - t$ eller

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså, om $a = -3$, har de tre planen en gemensam linje vars ekvation på parameterform är $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. Avbildningen $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en rotation med följande egenskaper: rotationsaxeln l är linjen $x_1 = x_2 = x_3$; positiva x_1-axeln avbildas till positiva x_2-axeln; positiva x_2-axeln avbildas till positiva x_3-axeln; positiva x_3-axeln avbildas till positiva x_1-axeln.
   (a) Bestäm matrisrepresentationen av avbildningen R i standardbas. **(1 p)**
   (b) Bestäm alla egenvärdena och egenvektorer av avbildningen. **(1 p)**
   (c) I planet som är vinkelrätt mot linjen l verkar avbildningen R som en rotation. Bestäm rotationsvinkeln. **(2 p)**

(a) Låt R beteckna avbildningen och A avbildningens matris. Då gäller

$R(1,0,0) = (0,1,0), \qquad R(0,1,0) = (0,0,1) \qquad R(0,0,1) = (1,0,0).$

Avbildningens matris är då

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 1 = 0$$

har en reell rot $\lambda = 1$. Alltså har avbildningen ett egenvärde $\lambda = 1$.
För att få tillhörande egenvektorer löser vi ekvationen

$$(A - \lambda I)X = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som ger egenvektorer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \neq 0$

(c) Betrakta en vektor i planet ortogonal mot linjen l. En sådan vektor ges av ex.vis $v = (1,-1,0)$ som är vinkelrät mot normalen tip planet some ges av $(1,1,1)$. Det räcker att bestämma vad R avbildar denna vektor till: $R(1,-1,0) = (0,1,-1) =: u$. För att bestämma vinkeln mellan dessa vektorer v, u så gäller det att bestämma $|u||v|\cos\theta = u \cdot v$, som ger $\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\theta = -1$, alltså $\cos\theta = -1/2$ och $\theta = 2\pi/3$.

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Bestäm en 2×2-matris A vars nollrum och kolonnrum överensstämmer. **(2 p)**
   (b) Visa att det inte finns någon 3×3-matris med ovanstående egenskap. **(2 p)**

   (a) Anta att A är en matris vars nollrum och kolonnrum överensstämmer. Låt Null(A) och Col(A) beteckna matrisens nollrum resp. kolonnrum. Enligt antagandet är Null(A) = Col(A) och därmed dim(Null(A))=dim(Col(A)). Enligt dimensionssatsen för en 2×2 matris gäller dim(Null(A))+dim(Col(A))=2. Därför är dim(Null(A))=1 och dim(Col(A))=1.

   Eftersom dim(Col(A))=1 har matrisen minst en kolonn skild från nollvektorn. Anta att $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ är matrisens första kolonn. Då har matrisen följande form

$$A = \begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

   Alltså vektorn är $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en bas i Col(A). Vi ska bestämma k så att nollrum och kolonnrum överensstämmer. Eftersom Null(A) = Col(A) ligger $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ i Null(A). Därför gäller $A\vec{v} = \vec{0}$ eller

$$\begin{bmatrix} a & ka \\ b & kb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 + kab \\ ab + kb^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Härav

$$\begin{cases} a(a+kb) & = 0 \\ b(a+kb) & = 0 \end{cases},$$

   som ger $k = \frac{-a}{b}$ om $b \neq 0$. För detta k blir

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{-a^2}{b} \\ b & -a \end{bmatrix}, \text{ där } b \neq 0, \text{ och } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Några exempel på A:

   1. $a = 0, b = 1$ ger $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, där Null($A$) = Col($A$) =Span($\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

   2. $a = 1, b = 1$ ger $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, där Null($A$) = Col($A$) =Span($\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Anmärkning. Vi kan anta att andra kollonen är skild från nollvektorn och upprepa resonemang. Då får vi

$$A = \begin{bmatrix} -b & a \\ -\frac{b^2}{a} & b \end{bmatrix} \text{ där } a \neq 0, \text{ och } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exempelvis:

$a = 1, b = 0$ ger $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, där Null($A$) = Col($A$) =Span($\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$).

(b) Notera att dim(Null(A)) och dim(Col(A)) är **icke negativa heltal.** Enligt dimensionssatsen för en 3×3 matris gäller
dim(Null(A))+dim(Col(A))=3. (*)
Om vi antar att Null(A) = Col(A) då är
dim(Null(A)) = dim(Col(A)) (**)
Från (*) och (**) får vi att dim(Null(A)) =1.5 och dim(Col(A))= 1.5 som är omöjligt.
Detta visar att det inte finns någon 3×3-matris vars nollrum och kolonnrum överensstämmer.

8. Bestäm vilka samband mellan talen a, b, c som krävs för att matrisen

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

blir diagonaliserbar. **(4 p)**

Börja med matrisens egenvärden som vi får ur ekvationen det$(A - \lambda I) = 0$ dvs

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & b-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0$$

som ger $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b$, $\lambda_3 = c$. Frågan är för vilka värden för a, b, c vi kan få en bas av egenvektorer.

Låt A vara en kvadratisk matris av typ $n \times n$. Matrisen A är diagonaliserbar om och endast om matrisen har en uppsättning av n st linjärt oberoende egenvektorer.
Låt E_{λ_k} beteckna det egenrum som hör till egenvärdet λ_k. Eftersom egenvektorer som hör till olika egenvärde är oberoende kan vi formulera ovanstående sats på ekvivalent sätt: Matrisen A är diagonaliserbar om och endast om $\sum_k \dim(E_{\lambda_k}) = n$.
Den geometriska multipliciteten för λ_k är dim(E_{λ_k}), där $E_{\lambda_k} = \text{Null}(A - \lambda_k I)$. För ett egenvärde λ_k gäller alltid (den geometriska multipliciteten för λ_k) $\leq$ (den algebraiska multipliciteten för λ_k).
Matrisen är diagonaliserbar om och endast om följande gäller:
1. Alla rötter till ekvationen det$(A - \lambda I) = 0$ är reella och
2. Den geometriska multipliciteten är lika med den algebraiska multipliciteten för varje egenvärde λ_k.
Matrisen är **inte** diagonaliserbar om för minst ett egenvärde λ_k gäller (den geometriska

multipliciteten för λ_k) $<$ (den algebraiska multipliciteten för λ_k), eftersom i detta fall kan vi inte finna n stycken lin. oberoende egenvektorer.

Anmärkning: Om λ är en enkel rot till det$(A - \lambda I) = 0$ så är villkoret (den geometriska multipliciteten) = (den algebraiska multipliciteten) automatiskt uppfylld. Därför räcker det att undersöka de egenvärden som har algebraisk multiplicitet $>$1.

Fall 1: a, b, c **är distinkta:**
Enligt en sats i boken om egenvärdena a, b, c är distinkta så har vi linjärt oberoende egenvektorer som då blir en bas för $\mathbb{R}^3$ och därför är matrisen diagonaliserbar då a, b, c är skilda tal.

Fall 2: $a = b \neq c$
Om $a = b$ och $a \neq c$ så är $\lambda_1 = c$ en enkel rot och $\lambda_2 = a$ en dubbel rot till ekvationen det$(A - \lambda I) = 0$. Alltså är $\lambda = a$ ett egenvärde med den algebraiska multipliciteten =2. Den geometriska multipliciteten för $\lambda = a$ är dimesionen av tillhörande egenrummet E_λ där $E_\lambda = \mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

För $\lambda = a$ har vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-a & 1 & 2 \\ 0 & b-a & -1 \\ 0 & 0 & c-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c-a \end{bmatrix}$$

Vi ser att kolonnrummet har dimensionen 2, dvs rang$(A - \lambda I) = 2$. Notera att enligt dimensionssatsen gäller rang$(A-\lambda I)+$dim(Null$(A-\lambda I)) = 3$. Därför är den geometriska multipliciteten = dim(Null$(A - \lambda I)) = 3 - 2 = 1$. Eftersom (1=den geometriska multipliciteten) $\neq$ (den algebraiska multipliciteten =2) är matrisen inte diagonaliserbar i detta fall.

Fall 3: $a = c \neq b$
Om $\lambda = a = c \neq b$ så är $\lambda = a$ ett egenvärde med den algebraiska multipliciteten =2. Vi har

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-a & 1 & 2 \\ 0 & b-a & -1 \\ 0 & 0 & c-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & b-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{b-a} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (\frac{-1}{b-a} - 2) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

som ger oss två fall: $\frac{-1}{b-a} = 2$, eller $\frac{-1}{b-a} \neq 2$.
i) Om $\frac{-1}{b-a} = 2$, dvs $b = a - \frac{1}{2}$, så är rang$(A-\lambda I) = 1$ och därmed är den geometriska multipliciteten = dim(Null$(A - \lambda I)) = 3 - 1 = 2$= den algebraiska multipliciteten.Därmed är dim(E_a)+dim(E_b)=3. Alltså kan vi bilda en bas med totalt tre egenvektorer: två från egenrummet E_a och en basvektor från egenrummet E_b. Därmed är matrisen diagonaliserbar i det här fallet.

ii) Om $\frac{-1}{b-a} \neq 2$, så är $\text{rang}(A - \lambda I) = 2$ och därmed är den geometriska multipliciteten = $\dim(\text{Null}(A - \lambda I)) = 3 - 2 = 1$. Eftersom (1=den geometriska multipliciteten) $\neq$ (den algebraiska multipliciteten =2) är matrisen inte diagonaliserbar i detta fall.

Fall 4: $b = c \neq a$
Om $\lambda = b = c \neq b$ så är $\lambda = b$ ett egenvärde med den algebraiska multipliciteten =2. Vi har

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-b & 1 & 2 \\ 0 & b-b & -1 \\ 0 & 0 & c-b \end{bmatrix} = \{b = c\} = \begin{bmatrix} a-b & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $\text{rang}(A - \lambda I) = 2$. Därför är den geometriska multipliciteten = $\dim(\text{Null}(A - \lambda I)) = 3 - 2 = 1$. Eftersom (1=den geometriska multipliciteten) $\neq$ (den algebraiska multipliciteten =2) är matrisen inte diagonaliserbar i detta fall.

Fall 5: $a = b = c$
Om $\lambda = a = b = c$ så är $\lambda = a$ ett egenvärde med den algebraiska multipliciteten =3. Vi har

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a-a & 1 & 2 \\ 0 & b-a & -1 \\ 0 & 0 & c-a \end{bmatrix} = \{a = b = c\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $\text{rang}(A - \lambda I) = 2$. Därför är den geometriska multipliciteten = $\dim(\text{Null}(A - \lambda I)) = 3 - 2 = 1$. Eftersom (1=den geometriska multipliciteten) $\neq$ (den algebraiska multipliciteten =3) är matrisen inte diagonaliserbar i detta fall.

Sammanfattningsvis har vi följande fall som kan ge diagonalisering:
1. a, b, c skilda tal.
2. $a = c \neq b$ samt $\frac{-1}{b-a} = 2$ (dvs $b = a - \frac{1}{2}$).

9. Låt V vara ett n-dimensionellt vektorrum och $L\colon V \to V$ en linjär avbildning som uppfyller att $L(L(v)) = L(v)$ för alla $v \in V$.
   (a) Visa att den enda vektor som ligger i både $\text{Range}(L)$ och $\text{Null}(L)$ är nollvektorn. **(2 p)**
   (b) Visa att det finns en bas $\mathcal{B}$ till V sådant att matrisrepresentationen av L m.a.p. basen $\mathcal{B}$ är en diagonalmatris där alla diagonalelement är antingen 0 eller 1. **(2 p)**

(a) Låt u vara en vektor som ligger i både $\text{Range}(L)$ och $\text{Null}(L)$. Då gäller

$$L(u) = 0_V. \qquad (1)$$

Dessutom finns det en vektor v i V sådan att

$$L(v) = u. \qquad (2)$$

Vi tillämpar L på båda sidor i (2) och får

$$L(L(v)) = L(u). \qquad (3)$$

Vi använder antagandet $L(L(v)) = L(v)$ och ovanstående relationer 1, 2 och 3 och får

$$0_V = L(u) = L(L(v)) = L(v) = u.$$

Alltså är $u = 0_V$ V.S.V.

(b) Anta att $\dim(V) = n$. Låt $\{a_1, \ldots, a_p\}$ vara en bas i $\mathrm{Range}(L)$ och $\{b_1, \ldots, b_q\}$ en bas i $\mathrm{Null}(L)$. Enligt dimensionssatsen gäller $p+q = n$. Låt $\mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q\}$. Vi ska visa att vektorerna i $\mathcal{B}$ är linjärt oberoende. Anta att

$$t_1a_1 + \ldots + t_pa_p + s_1b_1 + \ldots + s_qb_q = 0_V$$

eller

$$t_1a_1 + \ldots + t_pa_p = -(s_1b_1 + \ldots + s_qb_q).$$

Beteckna $w = t_1a_1 + \ldots + t_pa_p = -(s_1b_1 + \ldots + s_qb_q)$. Då ligger w i $\mathrm{Range}(L)$ (som en linjär kombination av vektorerna a_k) och i $\mathrm{Null}(L)$ (som en linjär kombination av vektorerna b_j). Enligt uppgiftens a-del är $w = 0_V$. Från $t_1a_1 + \ldots + t_pa_p = 0_V$ får vi $t_1 = 0, \ldots, t_p = 0$, eftersom basvektorerna $a_1, \ldots, a_p$ är linjäroberoende. På samma sätt, från $s_1b_1 + \ldots + s_qb_q = 0_V$, får vi $s_1 = 0, \ldots, s_q = 0$. Därför är vektorerna i $\mathcal{B}$ linjärt oberoende. Eftersom $\dim(V) = n$ och $\mathcal{B}$ består av n st. linjärt oberoende vektorer, är $\mathcal{B}$ en bas för vektorrummet V.

Om u är en vektor i $\mathrm{Range}(L)$, dvs om $u = L(v)$ för en vektor $v \in V$, gäller $L(u) = L(L(v)) = L(v) = u$. Basvektorerna $a_1, \ldots, a_p$ ligger i $\mathrm{Range}(L)$). Därför

$$L(a_k) = a_k$$

Motsvarande kolonn (nr k) i avbildningens matris har 1 på plats nummer k och alla andra element 0.

Basvektorerna $b_1, \ldots, b_q$ ligger i $\mathrm{Null}(L)$. Därför

$$L(b_j) = 0_V.$$

Motsvarande kolonn i avbildningens matris har alla element = 0.

Därmed är matrisrepresentationen av L m.a.p. basen $\mathcal{B}$ en diagonalmatris där alla diagonalelement är antingen 1 eller 0.