

KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2008-12-16, kl. 14.00-19.00 SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1 och CMIEL1(7,5hp)

Preliminära gränser. Registrerade på kursen SF1624 får graderat betyg enligt skalan A (högsta betyg), B, C, D, E (lägsta godkända betyg), F (underkänt). Betygsgränserna är 26-28p för betyg A; 23-25p för betyg B; 20-22p för betyg C; 17-19p för betyg D; 14-16p för betyg E. Den som fick 13p får tillfälligt betyg Fx som kan kompletteras till betyg E. Om kompletteringen misslyckas förvandlas betyget Fx till F. Kontakta i så fall läraren!
De som är redan registrerade på 5B1146 får betyg 5, 4, 3, K, U enligt det gamla systemet.
Betygsgränserna då är 26p för betyg 5; 22p för betyg 4; 14p för betyg 3. Den som fick 13p får tillfälligt att kompletteras till betyg 3

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningförslaget skall textförklaras. Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (Kladdpaper skall inte lämnas in.) Inga hjälpmedel!

Den som blivit godkänd på KS X , $1 \leq X \leq 4$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X , så skall motsvarande tal X inte räknas om.

3-poängsuppgifter

1. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ och punkten } (3, 1, -1).$$

2. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}.$$

3. Beräkna den matris X som löser följande matrisekvation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Visa med hjälp av den matematiska induktionen att $11^n - 4^n$ är jämnt delbart med 7 för alla heltal $n \geq 1$.

Var god Vänd

4-poängsuppgifter

4. Betrakta planet $\pi : -2x + y + 2z = 0$.
- (a) Beräkna matrisen för den linjära avbildningen $\vec{y} = A\vec{x}$ som speglar rummets vektorer i planet π .
- (b) Använd sedan denna matris för att beräkna spegelbilden av punkten $Q = (1, 2, 3)$ i planet π .

6. Betrakta vektorerna $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + a\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + a\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, där $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ är standard ON-basen i \mathbb{R}^3 .

- a) För vilka värden på konstanten a är \vec{f}_1, \vec{f}_2 och \vec{f}_3 linjärt beroende?
- b) Ange för alla a antalet lösningar till det linjära systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

7. En (3×3) -matris A har egenvärden $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$ och motsvarande

$$\text{egenvektorer } \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen A .

8. Vid en sk *elastisk* stöt mellan två partiklar med samma massa gäller att

$$\begin{cases} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 & (1) \\ |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 = |\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 & (2) \end{cases}$$

Här är \vec{v}_1, \vec{v}_2 partiklarnas hastigheter före kollisionen och \vec{u}_1, \vec{u}_2 partiklarnas hastigheter efter kollisionen. Relationerna betyder att både rörelsemängd och rörelseenergi bevaras. Visa att om \vec{v}_1 är ortogonal mot \vec{v}_2 så är också \vec{u}_1 ortogonal mot \vec{u}_2 .

Lösningsförslag

3-poängsuppgifter

1. Vi väljer en godtycklig punkt på linjen: T.ex för $t = 0$ får vi punkten $(2, -1, 1)$. Bilda vektorn \mathbf{v} från denna punkt till punkten $(3, 1, -1)$: $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$. Denna vektorn, samt linjens riktningsvektorn $\mathbf{r} = (3, 2, -3)$ är parallella med planet. Kryssprodukten $\mathbf{v} \times \mathbf{r}$ är planets normalvektorn. Man får

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\mathbf{e}_x - 6\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z - 6\mathbf{e}_z + 4\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y = - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Planets ekvation är på formen $2x + 3y + 4z = d$ och punkten $(3, 1, -1)$ uppfyller ekvationen, vilket ger $d = 5$.

Svar: $2x + 3y + 4z = 5$

2. Ekvationssystemet kan skrivas på formen $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

En minstakvadrat lösningen fås ur normalekvationen $A^t A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 9y = 0 \\ -9x + 18y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, y = 1.$$

Svar $x = 1, y = 1$

3. Sedvanlig matriskalkyl ger att

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

T.ex Invertering av 2x2-matriser ger

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Vi får } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 3 - 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 7} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Svar

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -27 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}$$

4. **Bassteg** Vi har $11^1 - 4^1 = 11 - 4 = 7$ är delbart med 7.

Induktionssteg: vi antar att för ett fixt m är $11^m - 4^m$ är delbart med 7, dvs $11^m - 4^m = 7k$ för något heltal k . Vi visar att $11^{m+1} - 4^{m+1}$ är delbart med 7. Vi har

$$11^{m+1} - 4^{m+1} = 11 \cdot 11^m - 4 \cdot 4^m = (7 + 4)11^m - 4 \cdot 4^m$$

Då är $= 7 \cdot 11^m + 4(11^m - 4^m) = [\text{antagandet } 11^m - 4^m = 7k]$

$$= 7 \cdot 11^m + 4 \cdot 7k = 7(11^m + 4k),$$

Också delbart med 7.

Slutsatsen Eftersom vi har visat att påstående gäller för bassteget $n=1$ samt att antagandet att påstående gäller för $n=m$ medför att det också gäller för $n=m+1$, följer det från induktionsprincipen att påståendet gäller för varje heltal $n = 1, 2, 3, \dots$

Alternativ lösning binomialsatsen ger att

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} \text{ som ger } 11^n - 4^n = (11 - 4) \sum_{k=0}^{n-1} 11^k 4^{n-k-1} = 7 \sum_{k=0}^{n-1} 11^k 4^{n-k-1}$$

dvs $11^n - 4^n$ är delbart med 7.

5. (a) Med planets normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är

$$A\vec{x} = \vec{x} - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}, \text{ där } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Vi får att

$$A = (A\vec{e}_1, A\vec{e}_2, A\vec{e}_3)$$

$$A\vec{e}_1 = \vec{e}_1 - 2 \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_2 = \vec{e}_2 - 2 \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_3 = \vec{e}_3 - 2 \frac{\vec{e}_3 \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} A =$$

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Spegelbildens Ortsvektor är

$$A(\overline{OB}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6a. Vektorerna \vec{f}_1, \vec{f}_2 och \vec{f}_3 är linjärt beroende precis då linjära ekvationssystemet

$$x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ har icke-triviala lösningar} \Leftrightarrow$$

systemet matris A är inte inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) = 0$. Men

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = (a+1)(2-a).$$

Delsvar. Vektorerna \vec{f}_1, \vec{f}_2 och \vec{f}_3 är linjärt beroende då $a = -1$ eller $a = 2$

6b. Systemet är entydigt lösbart för varje H1 om $\det(A) \neq 0$ dvs om $a \neq -1$ och $a \neq 2$.

Vi undersöker fallen

$$a = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

dvs systemet har oändligt många lösningar, samt

$$a = 2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

där av rad 2 utläses att systemet saknar lösning

Svar:

a) $a = -1$ eller $a = 2$

b) $a = -1$: oändligt många lösningar

$a = 2$: Systemet ej lösbart;
entydigt lösning i övrigt.

7. Egenvektorer $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är ortogonala men ej normerade

Vi normera dessa och sätt övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ som är en On-matris. Ty}$$

$$PP^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enligt teorin ges matrisen A av

$$A = PDP^t \Leftrightarrow P^tAP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Således är matrisen A symmetrisk som enligt diagonaliseringssatsen kan diagonaliseras av en ON matris bestående av en ON bas av egenvektorer.

8. De båda relationerna

$$\begin{cases} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \\ |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 = |\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 \end{cases} \text{ ger tillsammans med Pythagoras sats att}$$

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2|^2 = |\vec{v}_1 + \vec{v}_2|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = [|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0] = |\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2$$

Men

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2|^2 = |\vec{u}_1|^2 + |\vec{u}_2|^2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$$

Vilket ger att

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$