KTH-Matematik
Karim Daho
Tentamenskrivning, 2008-05-31, kl. 08.00-13.00
SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1(IT) och CMIEL1(ME) (7,5hp)

Preliminära gränser. För godkänd (betyg E) krävs minst 16 poäng. För övriga betyg är gränsen 19p för D, 23p för C, 27p för B samt 31p för A. Den som får 15p (Fx) erbjuds möjlighet till komplettering till betyg E. Kontakta i så fall läraren. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. **Lösningsförslaget skall textförklaras**.
Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (Kladdpaper skall inte lämnas in.)
Inga hjälpmedel!
Den som blivit godkänd på KS x , $1\le x \le 3$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS x , så skall motsvarande tal x inte räknas om.

3-poängsuppgifter

1. Betrakta vektorerna $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ och $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestäm *cosinus* av vinkel mellan vektorerna **u** och $-$ **v.**

(b) Bestäm $\mathbf{Proj_u(v)}$, dvs den ortogonala projektionen av **v** på **u.**

2. (a) För vilka värden på talet a gäller att ekvationssystemet A**x**=**b** **inte** har unik lösning om

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -a & 1\\ 2a & 1 & 3\end{pmatrix}$$

(b) Ge exempel på ett tal a och en vektor **b** så att A**x**=**b** har oändligt många lösningar.

3. Skriv $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{1+i\sqrt{3}}$ på formen $a + bi$, där a och b är reella tal. Svaret får inte innehålla trigonometriska uttryck.

4. Undersök om vektorerna $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\-7\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}4\\5\\7\\1\end{pmatrix}$ är linjärt oberoende i rummet $\mathbb{R}^4$.

5. Lös matrisekvationen $A^t X^{-1} = B$, där $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ och $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

Var god vänd

4-poängsuppgifter

6. Linjen L1 går genom punkterna (3,2,3) och (2,1,5). Linjen L2 går genom punkterna (0,1,7) och (2,2,4).
a. Bestäm skärningspunkten mellan L1och L2.
b. Bestäm ekvationen för det plan som innehåller L1 och L2.

7. Undersök om det finns konstanterna a och b sådana att ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax + by = b + b^2 \\ bx + \quad y = 1 + b \end{cases}$$

får precis en lösning $x = 1$, $y = 1$.

8. Bestäm den symmetriska matrisen A som har egenvektorn $(0,1,-2)^t$ med egenvärdet 0, egenvektorn $(1,0,0)^t$ med egenvärdet 1 och egenvektorn $(0,2,1)^t$ med egenvärdet 10.

9. Till en nyårsfest har tre sorters kostbara ingredienser medförts. Frampå natten har Kista lyckats få klart för sig att en blandning av ingredienserna i proportionerna 3:1:1 kostar 48 kr/liter, medan en blandning i förhållandet 2:1:2 kostar 80 kr/liter. Mellan vilka värden kan kostnaden för en liter av blandningen i proportionerna 1:1:2 ligga? Varje ingrediens har ett pris som är > 0.

10. Låt P och Q vara två godtyckliga punkter på kurvan $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$.
Kan avståndet mellan P och Q vara lika med 3?

KTH-Matematik

Karim Daho

Lösningsförslag till tentamenskrivning, 2008-05-31, kl. 08.00-13.00

SF1624, linjär algebra med geometri för CINTE1(IT) och CMIEL1(ME) (7,5hp)

1\. (a) $\dfrac{\mathbf{u}\bullet(-\mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}=-\dfrac{3}{5}$

(b) $\mathbf{Proj_u(v)}=\left[\mathbf{e}=\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right]=(\mathbf{v}\bullet\mathbf{e})\mathbf{e}=\dfrac{6}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ (se kursboken : Projektionssatsen sid 36)

2\. (a) Ej unik lösning om och endast om $\det(A)=0$ (se sats 5.1 sid 271)

$\det(A)=6a^2+a-7=0\Rightarrow a=1,-\dfrac{7}{6}$

(b) Tag t ex $a=1$ och låt **b** vara nollvektorn. Vi har då ett homogent system som ju alltid har oändligt många lösningar om det inte finns en unik sådan.(se sats 5.2 sid 275)

3\. Vi har $\sqrt{3}+i=2(\cos\pi/6+i\sin\pi/6)$ och $1+i\sqrt{3}=2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)$. de Moivres sats ger $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{2^5(\cos 5\pi/6+i\sin 5\pi/6)}{2(\cos\pi/3+i\sin\pi/3)}=2^4\big(\cos(5\pi/6-\pi/3)+i\sin(5\pi/6-\pi/3)\big)=16i.$

4\. se kursboken ex 5.14 sid 285.

5\. Vi har $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{X}^{-1}=\boldsymbol{B}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}^t=\boldsymbol{BX}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^t$ (om $\boldsymbol{B}$ är inverterbar). Man får

$\boldsymbol{B}^{-1}==\dfrac{1}{\det(B)}\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^t=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$ och

$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^t=.\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-2&6\end{pmatrix}=\boldsymbol{X}$

6a. Den första linjen har riktning av vektorn $\boldsymbol{u}=(3,2,3)-(2,1,5)=(1,1,-2)$. Linjens ekvation är $\boldsymbol{p}(s)=(3,2,3)+s(1,1,-2)=(3+s,\ 2+s,\ 3-2s)$.

Den andra linjen har riktning av vektorn $\boldsymbol{v}=(0,1,7)-(2,2,4)=(-2,-1,3)$. Linjens ekvation är $\boldsymbol{r}(t)=(0,1,7)+t(-2,-1,3)=(-2t,\ 1-t,\ 7+3t)$.

I skärningspunkten är $\boldsymbol{p}(s)=\boldsymbol{r}(t)$ dvs

$$\begin{cases}3+\ \ s=-2t\\2+\ \ s=1-t\\3-2s=7+3t\end{cases}$$

vilket ger $s=1,\ t=-2$. Skärningspunkten är $\boldsymbol{p}(1)=(4,3,1)$.

6b. Planets normalvektorn är $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(1,1,1)$ och planet går genom punkten $(3,2,3)$. Planets ekvation ges av $(1,1,1)(x-3,y-2,z-3)=0$, dvs $x+y+z=8$.

7\. Koefficientmatrisen är $\begin{pmatrix}a&b\\b&1\end{pmatrix}$ och dess determinant är $a-b^2$. Eftersom ekvationssytemet skall ha precis en lösning så måste $a\neq b^2$. Å andra sidan skall $x=1,\ y=1$ vara en lösning till ekvationssytemet vilket innebär att

$$\begin{cases} a + b = b + b^2 \\ b + 1 = 1 + b \end{cases}$$

alltså måste $a = b^2$.

Svar: Det finns inga sådana konstanter.

8. Se kursboken Ex 7.11 sid 340. Där finner man följande egenvärden med motsvarande egenvektorer:

$\lambda = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = (0,1,-2)^t, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2)$

$\lambda = 1 \Rightarrow \mathbf{u} = (1,0,0)^t, \quad \hat{\mathbf{u}} = (1,0,0)$

$\lambda = 10 \Rightarrow \mathbf{w} = (0,2,1)^t, \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)$

$\{\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{w}}\}$ **bildar en ON - bas.** vi får en ON-matris $P : PP^t = I$, där

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \Rightarrow P^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ Och } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar $A = PDP^t$

$$PDP^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = A$$

9. De tre ingredienserna kostar x, y respektive z kr/liter. En blandning i proportionerna 1:1:2 kostar a kr/liter. Då gäller

$$\begin{cases} 3x + y + \ \ z = (3 + 1 + 1) \cdot 48 \\ 2x + y + 2z = (2 + 1 + 2) \cdot 80 \\ \ \ x + y + 2z = (1 + 1 + 2) \cdot \ a \end{cases}$$

Man får

$$x = 400 - 4a, \ y = 16a - 1520, \ z = 560 - 4a$$

och eftersom $x > 0, y > 0$ och $z > 0$ så får vi att $95 < a < 100$.

10. Ekvationen $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 1$ kan skrivas på formen $\mathbf{x}^{\mathbf{t}} A\, \mathbf{x} = 1$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Den karakteristiska ekvationen = $(\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4 = 0$ ger två positiva egenvärden $\lambda = 6$ och $\lambda = 1$ vilket medför att ekvationen beskriver en ellips. Genom en vridning kan ellipsen överföras på en ellips med ekvationen $6\xi^2 + \eta^2 = 1$ vars halvaxellängder är $1/\sqrt{6}$ och 1. Det maximala avståndet mellan två punkter på denna ellips är 2.

Svar: nej