Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1624, Algebra och geometri för E1.
Tentamen, måndagen den 14 januari 2008 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För godkänd (betyg E) krävs minst 16 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 19p för D, 23p för C, 27p för B samt 31p för A. Den som får 15p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Under kursens gång gavs tre lappskrivningar. Den som har klarat lappskrivningen **X** befrias från uppgift **X** och får 3p (så att den som har klarat alla tre lappskrivningar befrias från tre första uppgifter och får 9p).

L Y C K A T I L L !

(3p) **1.** Bestäm avståndet från punkten $(1, -2, 2)$ till räta linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ 2t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

(3p) **2.** Ange alla a-värden för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 0 \\ 2x + ay + 2z = 2 \end{cases}$$

har exakt en lösning.

(3p) **3.** Bestäm konstanterna a, b och c så att matrisen A blir en ON-matris då

$$A = \begin{pmatrix} a & -2/\sqrt{5} & -2/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & b & -4/(3\sqrt{5}) \\ 2/3 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

(3p) **4.** Polynomet $2z^3 - 9z^2 + 14z - 5$ har ett nollställe $z = 2 + i$. Bestäm samtliga nollställen till polynomet.

(3p) **5.** Visa med hjälp av induktion att

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

(4p) **6.** Bestäm matris av den linjära avbildningen i rummet $\mathbb{R}^3$ som proekterar en godtycklig vektor vinkelrät på planet $2x - y - 2z = 0$.

VÄND!

(4p) **7.** Låt $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ vara en linjär avbildning. Det är givet att

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad T\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm $T\mathbf{x}$, där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(4p) **8.** Finns det någon punkt (x, y, z) där den kvadratiska formen

$$6x^2 + 7y^2 + 8z^2 + 14xz$$

antar ett negativt värde?

(4p) **9.** Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4p) **10.** Visa att mängden av alla polynom $p(x)$ av grad ≤ 3 som uppfyller $p(1) = 0$ utgör ett vektorrum. Ange någon bas av vektorrummet. Vad är dimension av vektorrummet?

Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

Lösningsforslag till tentamen i SF1624 den 14/01 2008

1. Låt $A = (1, -2, 2)$. Det minsta avståndet mellan punkten A och punkten $M = (2-t, 2t, 1+t)$ på linjen får man om vektor $\overrightarrow{AM} = (1-t, 2t+2, t-1)$ blir vinkelrät mot linjens riktningsvektor $\mathbf{v} = (-1, 2, 1)$. Scalärprodukt $\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{v} = 6t + 2$ och den är 0 för $t = -1/3$. Vi får $M = (7/3, -2/3, 2/3)$ och avståndet blir

$$|AM| = |(4/3, 4/3, 4/3)| = 4\sqrt{3}/3.$$

2. Matrisen till systemet är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

Systemet har exakt en lösning om dess determinant är skild från 0. Vi räknar

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & a-2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ a-2 & 0 \end{vmatrix} = -(a-1)(a-2).$$

Den är skild från 0 om $a \neq 1$ och $a \neq 2$.

3. Låt $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ vara tre kolonner av matrisen A. För att A blir en ON-matris krävs det att dessa vektorer är vinkelräta mot varandra och har längden 1.

Villkor $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_3$ (vilket är ekvivalent med att $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$) ger oss $b = \sqrt{5}/5$. Vi kollar att detta värde ger oss också $|\mathbf{v}_2| = 1$.

Villkor $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{v}_1$ ger oss $a = 1/3$ och vi kollar att detta värde ger oss också $|\mathbf{v}_1| = 1$.

Äntligen, villkor $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_3$ ger oss $c = \sqrt{5}/3$ och vi kollar att detta värde ger oss också $|\mathbf{v}_3| = 1$.

4. Ursprungliga polynomet har alla koefficienter reella. Då har det tillsammans med nollstället $z = 2 + i$ det nollstället $\bar{z} = 2 - i$. Detta innebär att vårt ursprungliga polynom kan skrivas i form

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 2(z - (2+i))(z - (2-i))(z - z_3),$$

där z_3 är det tredje nollstället. Direkt beräkning ger oss $(z - (2+i))(z - (2-i)) = z^2 - 4z + 5$ och polynomdivision ger

$$2(z - z_3) = \left(2z^3 - 9z^2 + 14z - 5\right) : \left(z^2 - 4z + 5\right) = 2z - 1.$$

Vi avgör att $z_3 = 1/2$.

5. Bas av induktion d v s fallet $n = 1$ gäller självklart: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$.

Antar nu att formel stämmer för något heltal n. Vi skall visa att samma formel stämmer också för nästa heltal $n+1$. Vi har då

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} =$$
$$= \Big[\text{ enligt induktionsantagandet }\Big] = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$
$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

vilket skulle bevisas.

6. Avbildningen skickar varje vektor $\mathbf{u}$ i rummet till en vektor $\mathbf{v}$ där $\mathbf{v} = \mathbf{u} - P_l\mathbf{u}$, där $P_l\mathbf{u}$ är projektoin av vektor $\mathbf{u}$ på linjen l vinkelrät mot planet. Om $\mathbf{n}$ är normalvektor till planet som har längden 1, då projektionen ges av formel $P_l\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ och vi får $\mathbf{v} = \mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Ur planets ekvation får vi

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{u} = (x,y,z)^t$, då $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 2x/3 - y/3 - 2z/3$. Detta ger oss

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - (2x/3 - y/3 - 2z/3)\cdot\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} x - \frac{2}{3}(2x/3 - y/3 - 2z/3) \\ y + \frac{1}{3}(2x/3 - y/3 - 2z/3) \\ z + \frac{2}{3}(2x/3 - y/3 - 2z/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x/9 + 2y/9 + 4z/9 \\ 2x/9 + 8y/9 - 2z/9 \\ 4x/9 - 2y/9 + 5z/9 \end{pmatrix}.$$

Matris av avbildningen blir

$$\begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & 4/9 \\ 2/9 & 8/9 & -2/9 \\ 4/9 & -2/9 & 5/9 \end{pmatrix}.$$

7. Vi uttrycker först $\mathbf{x}$ som linjär kombination

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att man skall lösa linjära systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Systemet har lösningen $c_1 = -3$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$. Detta ger oss

$$T\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

8. Matrisen av kvadratiska formen blir

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma om formen är positiv definit skall vi räkna matrisens egenvärdena. Vi har

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 7 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 7 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \big[\text{ utveckling längst andra raden }\big] =$$

$$= (7-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 6-\lambda & 7 \\ 7 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda - 1).$$

Egenvärdena blir $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 7 + \sqrt{50}$ och $\lambda_3 = 7 - \sqrt{50}$. Eftersom $\lambda_3 < 0$ och $\lambda_1 > 0$, avgör vi att den kvadratiska formen är ej definit. Den kan anta både positiva och negativa värden.

9. Vi söker först egenvärdena till matrisen. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -3 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \big[\text{ den första raden adderas till den andra }\big] =$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \big[\text{ utveckling längst andra raden }\big] =$$

$$= -(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}. =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda - 1)^3.$$

Vi ser att det enda egenvärdet är $\lambda = 1$.

Vi söker nu egenvektorer som hör till $\lambda = 1$. Vi har

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Motsvarande homogena system har lösningen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ t - 2s \end{pmatrix}.$$

Det är allmän form av egenvektorer.

10. Man kollar direkt att en linjär kombintion av polynom av grad högst tre med egenskap $p(1) = 0$ är igen polynom av grad högst 3 med egenskap $p(1) = 0$. Detta visar att sådana polynom utgör ett vektorrum. För att bestämma en bas skriver vi en allmän polynom av grad högst tre i form $p(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$. Vi ser att $p(x) = 0$ om och endast om $a = 0$. Detta visar att vi sysslar med alla polynom i form $b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$ med godtyckliga b, c och d. En bas blir då polynomen $p_1(x) = x-1$, $p_2(x) = (x-1)^2$ och $p_3(x) = (x-1)^3$. De är linjärt oberoende ty ekvation $c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3$ uppfylls för alla x endast om $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Och alla polynom i vårt vektorrum uttrycks som linjära kombinationer av polynom p_1, p_2, p_3. Detta bevisar att vi får an bas.

Eftersom basen består av tre stycken polynom, dimension av vektorrummet är tre.