Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1624, Algebra och geometri för E1.
Tentamen, måndagen den 22 oktober 2007 kl 8.00–13.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Inga hjälpmedel tillåtna. För godkänd (betyg E) krävs minst 16 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 19p för D, 23p för C, 27p för B samt 31p för A. Den som får 15p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Under kursens gång gavs tre lappskrivningar. Den som har klarat lappskrivningen **X** befrias från uppgift **X** och får 3p (så att den som har klarat alla tre lappskrivningar befrias från tre första uppgifter och får 9p).

L Y C K A T I L L !

(3p) **1.** Punkten $(1, -2, 0)$ och linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 3 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

ligger båda i ett plan. Bestäm planets ekvation.

(3p) **2.** Bestäm, för samtliga värden på talet a, antalet lösningar till systemet

$$\begin{cases} x + y - az = -2 \\ -x + y = 1 \\ 2x + (2a+2)y - (2a+4)z = -6 \end{cases}.$$

(3p) **3.** Bestäm invermatris till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3p) **4.** Lös ekvationen

$$z^2 + (2-2i)z - 4i = 0.$$

(3p) **5.** Visa med hjälp av induktion att

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{för} \qquad n = 1, 2, \dots$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4p) **6.** Bestäm matris av den linjära avbildningen i rummet $\mathbb{R}^3$ som ges av speglingen i planet $x - 2y + 2z = 0$.

VÄND!

(4p) **7.** För vilka värden på parametern a är vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

i rummet $\mathbb{R}^4$ linjärt beroende?

(4p) **8.** En kurva i planet med standarda rektangulära koordinater (x, y) har en ekvation

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2y - 2x + 2 = 0.$$

Bestäm kurvans ekvation i ett nytt koordinatsystem (x', y') om nya axlarna är parallela med vektorer

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Vad heter kurvan?

(4p) **9.** Diagonalisera ortonalt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

d v s ange ortogonal matris P och diagonal matris D sådana att $A = PDP^t$.

(4p) **10.** En kvadratisk matris A uppfyller matrisekvation

$$A^2 + A + I = 0,$$

där I är enhetsmatrisen. Visa att matrisen A saknar reella egenvärdena.

Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

Lösningsforslag till tentamen i SF1624 den 22/10 2007

1. Eftersom planet går genom punkten $(1,-2,0)$, det har ekvation $a(x-1)+b(y+2)+cz=0$, där a,b,c är koefficienter av normalvektor till planet. För att bestämma normalvektor $\mathbf{n}$ tar vi några två vektorer i planet och räknar deras kryssprodukt. Den första vektor i planet är t ex linjens riktningsvektor $\mathbf{v}_1=(2,0,-1)$. Den andra är t ex vektor mellan punkterna $(1,-2,0)$ och punkten på linjen som svarar till $t=0$ d v s punkten $(-1,3,1)$. Vi får då den andra vektor $\mathbf{v}_2=(2,-5,-1)$. Deras kryssprodukt blir

$$\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & -5 & -1\end{vmatrix}=-5\mathbf{e}_x-10\mathbf{e}_z=-5(1,0,2).$$

Vi väljer $\mathbf{n}=(1,0,2)$ och vi får planets ekvation $1\cdot(x-1)+2z=0$ eller $x+2z=1$.

2. Matrisen till systemet är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 2a+2 & -2a-4 & -6\end{array}\right).$$

Två första radoperationer: den första raden adderas till den andra samt den första gånger (-2) adderas till den tredje. Nya matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2\\ 0 & 2 & -a & -1\\ 0 & 2a & -4 & -2\end{array}\right).$$

Nästa radoperationen: den andra raden gånger $(-a)$ adderas till den tredje. Nya matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -2\\ 0 & 2 & -a & -1\\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2\end{array}\right).$$

Den sista ekvationen är $(a^2-4)z=a-2$. Om $a^2-4\neq 0$ d v s $a\neq\pm 2$ då har den entydig lösning och två andra ekvationer i systemet lösas också entydigt. Alltså, för $a\neq\pm 2$ systemet har en lösning.

Om $a=2$, den sista akvationen blir $0=0$ och två andra ekvationer ger oändligt många lösningar till systemet. Om $a=-2$, den sista ekvationen blir $0=-4$ som saknar lösning. Då saknar systemet lösningar också.

3. Enligt metoden, skriver vi först matrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

och tillämpar därefter radoperationer för att återföra den vänstra kvadrat till en enhetsmatris. I höger kvadrat då får man den inversa matrisen. Den första radoperationen som behövs för att köra Gausselimination är omkastning av två första raderna. Nya matrisen blir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Därefter kör man Gausselimination på ett vanligt sätt och man får svar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & -3 \\ -5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Enligt standardforlmel för andragradsekvationer, rötterna är

$$z_{1,2} = -1 + i \pm \sqrt{(1-i)^2 - (-4i)} = -1 + i \pm \sqrt{2i}.$$

Nu skall vi bestämma $\sqrt{2i}$ d v s lösa ekvation $w^2 = 2i$. Vi söker w i form $w = x + iy$ med **reella** x och y. Då

$$2i = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

varav

$$x^2 - y^2 = 0 \qquad \text{och} \qquad 2xy = 2.$$

Den första ekvationen ger oss $y = \pm x$. I fallet $y = x$ insättningen till den andra ekvationen ger $2x^2 = 2$ d v s $x = 1 = y$ eller $x = -1 = y$. I fallet $y = -x$ insättningen till den andra ekvation ger oss $-2x^2 = 2$ och den ekvationen saknar **reella** lösningar (och man söker endast **reella** x och y). Alltså, får vi

$$\sqrt{2i} = \pm(1+i)$$

och insättningen till den första formel ger oss $z_1 = 2i$ och $z_2 = -2$.

5. Bas av induktion d v s fallet $n = 1$ gäller självklart.

Antar nu att formel stämmer för något heltal n. Vi skall visa att samma formel stämmer också för nästa heltal $n+1$. Vi har då

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \left[\text{ enligt induktionsantagandet }\right] =$$
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \left[\text{ matrismultiplikation }\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket skulle bevisas.

6. Avbildningen skickar varje vektor $\mathbf{u}$ i rummet till en vektor $\mathbf{v}$ där $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2P_l\mathbf{u}$, där $P_l\mathbf{u}$ är projektoin av vektor $\mathbf{u}$ på linjen l vinkelrät mot planet. Om $\mathbf{n}$ är notmalvektor till planet som har längden 1, då projektionen ges av formel $P_l\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ och vi får $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$. Ur planets ekvation får vi

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Om $\mathbf{u} = (x, y, z)^t$, då $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = x/3 - 2y/3 + 2z/3$. Detta ger oss

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2(x/3 - 2y/3 + 2z/3) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x - \frac{2}{3}(x/3 - 2y/3 + 2z/3) \\ y + \frac{4}{3}(x/3 - 2y/3 + 2z/3) \\ z - \frac{4}{3}(x/3 - 2y/3 + 2z/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x/9 + 4y/9 - 4z/9 \\ 4x/9 + y/9 + 8z/9 \\ -4x/9 + 8y/9 + z/9 \end{pmatrix}.$$

Matris av avbildningen blir

$$\begin{pmatrix} 7/9 & 4/9 & -4/9 \\ 4/9 & 1/9 & 8/9 \\ -4/9 & 8/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

7. Antar att $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0$. Då talen c_1, c_2 och c_3 är lösningar till homogena systemet med matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efter standarda radoperationer matrisen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a + 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att motsvarande system har endast triviala lösningen $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ om $a \neq -3/2$. Då är vektorerna linjärt oberoende. I fallet $a = -3/2$ systemet har oändligt många lösningar och vektorerna är linjärt beroende.

8. Överföringsmatris är

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

och den fungerar så att de gamla koordinaterna (x, y) uttrycks genom de nya (x', y') enligt formel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

d v s

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \qquad \text{och} \qquad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Insättningen av dessa uttryck till ursprungliga kurvans ekvation ger oss efter förenkling

$$y' = x'^2/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}.$$

Det är ekvation av en parabel.

9. Vi söker först egenvärdena till matrisen. Den karakteristiska ekvationen är

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

Den har rötter $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.

Den första egenvektor $\mathbf{v}_1$ som hör till $\lambda_1 = 3$ är lösningen till homogena system med matrisen

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vi får vektor i allmän form

$$\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$$

och efter normaliseringen får vi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Den andra egenvektor $\mathbf{v}_2$ som hör till $\lambda_2 = -2$ är lösningen till homogena system med matrisen

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får vektor i allmän form

$$\begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$$

och efter normaliseringen får vi

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Alltså, diagonalmatrisen D och ortogonalmatrisen P är

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

10. Vi antar att det finns något reelt egenvärde λ och motsvarande egenvektor $\mathbf{v} \neq 0$. Då det gäller att

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \qquad \text{och} \qquad A^2\mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}$$

vilket ger oss

$$0 = (A^2 + A + I)\mathbf{v} = (\lambda^2 + \lambda + 1)\mathbf{v}.$$

Eftersom $\mathbf{v} \neq 0$, det är möjligt endast om

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Men denna andragradsekvation saknar reella lösningar (lätt att kolla!) och vi får motsäjelse. Alltså vårt antagande om existens av reella egenvärdena var fel.