KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
13 mars 2015

Skrivtid: 8.00-13.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Planet H ges av ekvationen $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.
   a) Bestäm en linje N som är vinkelrät mot H. **(2 p)**
   b) Bestäm en linje L som inte skär planet H. **(2 p)**

2. Låt $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Betrakta den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som är definierad genom

$$F(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad F(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm $F(\vec{v})$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(1 p)**
   (b) Bestäm dimensionen av nollrummet $\mathrm{Ker}(F)$, och bildrummet $\mathrm{Im}(F)$. **(2 p)**
   (c) Bestäm en bas för nollrummet $\mathrm{Ker}(F)$. **(1 p)**

3. (a) Vad menas med begreppet egenvektor? **(1 p)**
   (b) Avgör vilka vektorerna

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   som är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. **(2 p)**
   (c) Bestäm egenvärden och tillhörande egenrum till matrisen A. **(1 p)**

DEL B

4. I $\mathbb{R}^4$ har vi, för varje tal a, följande tre vektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Vi låter $V = \operatorname{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ vara deras linjära hölje.

(a) Bestäm för vilka värden a vektorrummet V har dimension tre. **(2 p)**

(b) Låt $a = 1$, och bestäm en bas till det ortogonala komplementet $V^\perp$. **(2 p)**

5. (a) Definiera vad som menas med *koordinatvektorn* för en vektor med avseende på en bas. **(1 p)**

(b) Betrakta följande vektorer i $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ sådan att koordinatvektorn för $\vec{v}$ är $\vec{w}$ och koordinatvektorn för $\vec{w}$ är $\vec{v}$. **(3 p)**

6. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ och $\vec{n} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ vara två nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^2$, där $ac + bd = 0$. Låt L vara det linjära höljet till $\vec{v}$.

(a) Varför är $\beta = \{\vec{v}, \vec{n}\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$? **(1 p)**

(b) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen om linjen L. Bestäm matrisrepresentationen B till T med avseende på basen β. **(1 p)**

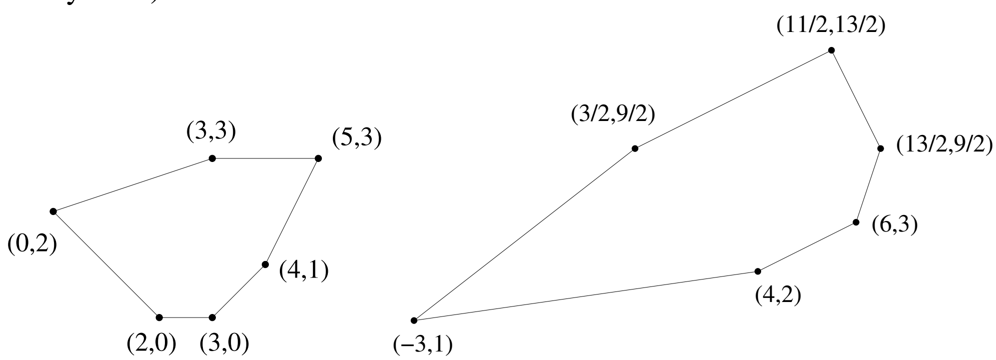
(c) Låt P vara basbytesmatrisen från standardbasen till β. Bestäm $P^{-1}BP$. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Talföljden $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots,\}$ satisfierar följande rekursiva formel
$$f_{n+2} = 2f_{n+1} + 8f_n, \qquad (*)$$
för alla $n \geq 0$. De två första termerna i talföljden är kända, $f_0 = a$ och $f_1 = b$. Uttryck f_{n+1} som en sluten formel i a och b. (Tips: Beteckna $F(n+1) = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$ och skriv ekvationen (*) på matrisform). **(4 p)**

8. Betrakta följande två figurer. (Vid varje punkt anges dess koordinater i ett vanligt cartesiskt koordinatsystem.)



   (a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som transformerar den vänstra figuren till den högra. Du ska ange matrisen för T. **(2 p)**
   (b) Bestäm arean för det inneslutna området i den högra figuren. **(2 p)**

9. Om A, B, C och D är kvadratiska matriser av samma storlek kan vi bilda en större kvadratisk matris som *blockmatrisen*
$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$
Antag att A är inverterbar och att matriserna A och C kommuterar med varandra, dvs att $AC = CA$. Visa att **(4 p)**
$$\det(M) = \det(AD - CB).$$
(Du kan använda fritt att om B eller C är noll-matrisen, då gäller att $\det(M) = \det(AD)$.)

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 15.03.13

DEL A

1. Planet H ges av ekvationen $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.
   a) Bestäm en linje N som är vinkelrät mot H. **(2 p)**
   b) Bestäm en linje L som inte skär planet H. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Vi vet att vektorn $\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ är vinkelrät mot planet H. Därmed vill varje linje på formen $\{P + t \cdot \vec{n} \mid \text{tal } t\}$ vara vinkelrät mot H, för varje vald punkt P. T.ex kan vi välja P som origo, och vi har att linjen $\begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ 5t \end{bmatrix}$ (parameter t) är vinkelrät mot H.

b) Vi väljer två punkt Q och R i planet, och bildar vektorn $\vec{v} = R - Q$. Då vill varje linje på formen $\{P + t\vec{v} \mid \text{tal } t\}$ vara parallell med planet H. Om vi sedan väljer punkten P att inte ligga i planet, har vi en linje som inte skär H. Vi väljer punkterna

$$Q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad R = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vilket ger $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Och vi väljer $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Detta ger oss linjen

$$\{\begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} \mid \text{tal } t\}.$$

Svar.

2. Låt $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vara standardbasen för $\mathbb{R}^3$. Betrakta den linjära avbildningen $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som är definierad genom

$$F(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad F(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm $F(\vec{v})$ där $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(1 p)**

(b) Bestäm dimensionen av nollrummet $\mathrm{Ker}(F)$, och bildrummet $\mathrm{Im}(F)$. **(2 p)**

(c) Bestäm en bas för nollrummet $\mathrm{Ker}(F)$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Standardmatrisen för F är $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, så

$$F(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Standardmatrisen Gauss-reduceras till

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Man konstaterar att rangen av standardmatrisen är 2, vilket betyder att $\dim \mathrm{Im}(F) = 2$. Enligt dimensionssatsen är $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathrm{Im}(F) + \dim \mathrm{Ker}(F)$ och alltså är $\dim \mathrm{Ker}(F) = 1$.

(b) Eftersom $\dim \mathrm{Ker}(F) = 1$ utgör varje enskild vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ som uppfyller $F(\vec{v}) = 0$ en bas. Från (a) följer att $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas.

3. (a) Vad menas med begreppet egenvektor? **(1 p)**

(b) Avgör vilka vektorerna

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

som är egenvektorer till matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. **(2 p)**

(c) Bestäm egenvärden och tillhörande egenrum till matrisen A. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Att $\vec{x}$ är en egenvektor till matrisen A betyder att $\vec{x}$ är nollskild och parallell med $A\vec{x}$, dvs att det finns en skalär λ så att $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

(b) För att se vilka av vektorerna som är egenvektorer multiplicerar vi dem med matrisen och ser om resultatet är parallellt med vektorn.

Vi får

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \end{bmatrix} \quad \text{som inte är parallell med } \vec{x},$$

$$A\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{som är parallell med } \vec{y},$$

$$A\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{som är parallell med } \vec{z}$$

och

$$A\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{som är inte parallell med } \vec{y}.$$

Alltså ser vi att $\vec{y}$ och $\vec{z}$ är egenvektorer, medan $\vec{x}$ och $\vec{w}$ inte är det.

(c) Från beräkningen i del (b) ser vi att $\vec{y}$ är en egenvektor med egenvärde 0 och $\vec{z}$ är en egenvektor med egenvärde 6. Eftersom det högt kan finnas två olika egenvärden måste dessa vara samtliga och motsvarande egenrum ges av multiplerna av vektorerna $\vec{y}$ och $\vec{z}$.

Svar.

(b) $\vec{y}$ och $\vec{z}$ är egenvektorer till A.

(a) Egenvärdena är 0 med egenrum $\mathrm{Span}\{\vec{y}\}$ och 6 med egenrum $\mathrm{Span}\{\vec{z}\}$.

DEL B

4. I $\mathbb{R}^4$ har vi, för varje tal a, följande tre vektorer

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Vi låter $V = \operatorname{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ vara deras linjära hölje.

(a) Bestäm för vilka värden a vektorrummet V har dimension tre. **(2 p)**

(b) Låt $a = 1$, och bestäm en bas till det ortogonala komplementet $V^\perp$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

a) Vektorrummet V har dimension tre om (och endast om) vektorerna $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$ är linjärt oberoende. Detta är ekvivalent med att matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

har rang tre. Matrisens rang bestämmer vi med hjälp av elementära radoperationer.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6-3a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisen A har rang 3 om (och endast om) $6 - 3a \neq 0$ dvs om $a \neq 2$. Därmed har V dimension 3 om $a \neq 2$.

b) Det ortogonala komplementet $V^\perp$ består av alla vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ som är ortogonala mot basvektorerna

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att $\vec{v}_1 \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$ och $\vec{v}_3 \cdot \vec{u} = 0$. Skriver vi ut detta erhåller vi det homogena ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - w = 0 \\ 2x + y + z + 3w = 0 \\ 4x + 2y + 3z + 11w = 0. \end{cases}$$

Vi gör elementära radoperationer på totalmatrisen till systemet

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\2&1&1&3\\4&2&3&11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&-3&1&5\\0&-6&3&15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&-3&1&5\\0&0&1&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&5\end{bmatrix}$$

Vi betecknar $w = t$ och får $z = -5t$, $y = 0$ och $x = t$. Alltså har vi att

$$V^{\perp} = \{t\begin{bmatrix}1\\0\\-5\\1\end{bmatrix} \mid \text{tal} \quad t\}.$$

Härav följer att vektorn $\begin{bmatrix}1\\0\\-5\\1\end{bmatrix}$ är en bas till $V^{\perp}$.

Svar.

5. (a) Definiera vad som menas med *koordinatvektorn* för en vektor med avseende på en bas. **(1 p)**

(b) Betrakta följande vektorer i $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{R}^2$ sådan att koordinatvektorn för $\vec{v}$ är $\vec{w}$ och koordinatvektorn för $\vec{w}$ är $\vec{v}$. **(3 p)**

Lösningsförslag. a) Låt $\beta = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ vara en bas för vektorrummet V, och låt $\vec{x}$ vara en vektor. Då kan $\vec{x}$ uttryckas som

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i,$$

för några skalärer $a_1, \ldots, a_n$. Den ordnade sekvensen av skalärer

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

kallas koordinatvektorn till $\vec{x}$ med avseende på basen β.

b) Låt $\{\vec{e}, \vec{f}\}$ vara den sökta basen för $\mathbb{R}^2$. Kraven är att $\vec{v} = \vec{e} - \vec{f}$ och att $\vec{w} = \vec{2} + 2\vec{f}$. Dessa två krav kan vi skriva som

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{f} \end{bmatrix}.$$

Inverterar vi 2×2-matrisen, får vi sambandet att

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{f} \end{bmatrix}.$$

Med andra ord har vi att

$$\vec{e} = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$\vec{f} = -\frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Svar.

6. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ och $\vec{n} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ vara två nollskilda vektorer i $\mathbb{R}^2$, där $ac + bd = 0$. Låt L vara det linjära höljet till $\vec{v}$.

(a) Varför är $\beta = \{\vec{v}, \vec{n}\}$ en bas för $\mathbb{R}^2$? **(1 p)**

(b) Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen om linjen L. Bestäm matrisrepresentationen B till T med avseende på basen β. **(1 p)**

(c) Låt P vara basbytesmatrisen från standardbasen till β. Bestäm $P^{-1}BP$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

a) Två vektorer i ett tvådimensionellt vektorrum bildar en bas om och endast om de är linjärt oberoende. Noll-skilda vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{n}$ är ortogonala eftersom skalärprodukten $\vec{v} \cdot \vec{n} = ac + bd = 0$. Detta medför att $\vec{v}$ och $\vec{n}$ är två linjärt oberoende vektorer och därmed bildar de en bas i $\mathbb{R}^2$.

b) Vid speglingen i linjen $L = \mathrm{Span}(\vec{v})$ avbildas $\vec{v}$ på $\vec{v}$ och $\vec{n}$ på $-\vec{n}$. Från $T(\vec{v}) = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{n}$ och $T(\vec{n}) = -\vec{n} = 0 \cdot \vec{v} - 1 \cdot \vec{n}$ får vi att avbildningens matris i basen $\beta = \{\vec{v}, \vec{n}\}$ är $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Matrisen $Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ är övergångsmatrisen från β till standardbasen. Därmed är $P = Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ övergångsmatrisen från standardbasen till β. Härav

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -c \\ b & -a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad+bc & -2ac \\ 2bd & -bc-ad \end{bmatrix}.$$

Anmärkning: Om $b \neq 0$ och vi substituerar $d = -ac/b$, kan vi förenkla svaret till

$$P^{-1}BP = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{bmatrix}.$$

c') Alternativt: Eftersom $P^{-1}BP$ är avbildningens matris i standardbasen kan vi beräkna matrisprodukten genom att avbilda en godtyckligt vektor. Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^2$. Vi har att

$$\vec{u} = \mathrm{proj}_L(\vec{u}) + (\vec{u} - \mathrm{proj}_L(\vec{u})).$$

Detta ger att $T(\vec{u}) = 2\,\mathrm{proj}_L(\vec{u}) - \vec{u}$. Vi har att linjen L spänns upp av vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, och vi erhåller att

$$T(\vec{u}) = 2\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v} - \vec{u} = 2\frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2a^2x+2aby}{a^2+b^2} \\ \frac{2abx+2b^2y}{a^2+b^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Alltså är $\begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$ avbildningens matris i standard basen och därmed är

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.$$

DEL C

7. Talföljden $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots, \}$ satisfierar följande rekursiva formel

$$f_{n+2} = 2f_{n+1} + 8f_n, \qquad (*)$$

för alla $n \geq 0$. De två första termerna i talföljden är kända, $f_0 = a$ och $f_1 = b$. Uttryck f_{n+1} som en sluten formel i a och b. (Tips: Beteckna $F(n+1) = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$ och skriv ekvationen (*) på matrisform). **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi har att $F(n+1) = AF(n)$, där

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Det följer då att $F(n+1) = A^n F(1)$. Om vi betraktar matrisen A som en linjär avbildning på $\mathbb{R}^2$, så har vi att $A = PDP^{-1}$ där P är övergångsmatrisen från en bas av egenvektorer till standardbasen, och där D är en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen. Speciellt vill vi använda detta för att beräkna A^n.

Det karakteristiska polynomet till A är $c(\lambda) = (\lambda - 2)\lambda - 8$. Nollställerna är

$$0 = c(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 9 = (\lambda - 1)^2 - 9.$$

Det vill säga, $\lambda = -2$ och $\lambda = 4$. Vi bestämmer sedan de tillhörande egenrummen. För $\lambda = -2$ ges egenrummet av ekvationen $x + 2y = 0$. En bas är $\vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. Egenrummet tillhörande egenvärdet $\lambda = 4$ ges av ekvationen $x - 4y = 0$. En bas är $\vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Detta ger övergångsmatriserna

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi har att

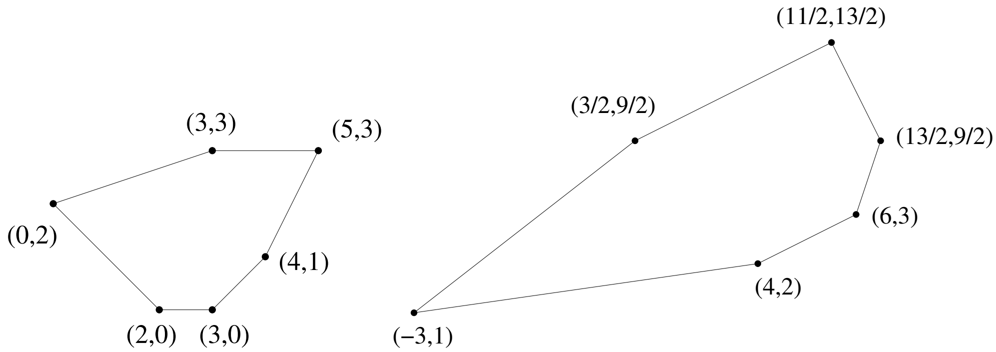
$$\begin{aligned}
A^n = PD^nP = P \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \frac{2^n}{6} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2^{n-1}}{3} \begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 2 & 4 \cdot 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2^{n-1}}{3} \begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 2 + 4 \cdot 2^n & (-1)^{n+1} \cdot 8 + 8 \cdot 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n \cdot 4 + 2^{n+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi har att $F(n+1) = A^n F(1)$, vilket ger att

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{2^{n-1}}{3}\Big(\big((-1)^n \cdot 2 + 4 \cdot 2^n\big)b + \big((-1)^{n+1} \cdot 8 + 8 \cdot 2^n\big)a\Big) \\ &= \frac{2^n}{3}((-1)^n + 2^{n+1})b + \frac{2^{n+2}}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)a. \end{aligned}$$

Svar.

8. Betrakta följande två figurer. (Vid varje punkt anges dess koordinater i ett vanligt cartesiskt koordinatsystem.)



(a) Bestäm en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som transformerar den vänstra figuren till den högra. Du ska ange matrisen för T. **(2 p)**

(b) Bestäm arean för det inneslutna området i den högra figuren. **(2 p)**

Lösningsförslag.

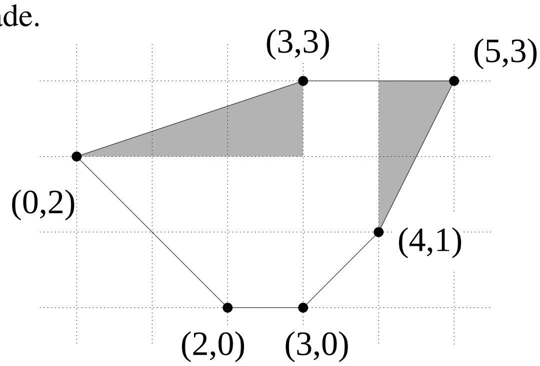
(a) Det gäller först att lista ut vilka punkter i den vänstra figuren som ska avbildas på vilka punkter i den högra figuren. Låt oss ge namn åt tre (ortsvektorer till) punkter i den vänstra figuren: $\vec{p} := \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]$, $\vec{q} := \left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ och $\vec{r} := \left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]$.
Eftersom $\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{r}$ och T är linjär så måste $T(\vec{q}) = \frac{2}{3}T(\vec{r})$. Dom enda punkter i den högra figuren som uppfyller denna relation är $(4,2)$ och $(6,3)$ så vi måste ha $T(\vec{q}) = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ och $T(\vec{r}) = \left[\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right]$. I den vänstra figuren är $\vec{p}$ granne till $\vec{q}$, så vi vill att $T(\vec{p})$ ska vara granne till $T(\vec{q})$ och då måste $T(\vec{p}) = \left[\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right]$.
Ekvationerna $T(\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ och $T(\left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right]$ ger tillsammans att matrisen för T måste vara

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}.$$

En kontroll visar att A avbildar även dom andra punkterna korrekt:

$$A\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\9/2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11/2\\13/2\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13/2\\9/2\end{bmatrix}.$$

(b) Om vi ritar in några hjälplinjer i den vänstra figuren blir det lätt att beräkna arean av dess inneslutna område.



Dom skuggade trianglarna har arean $3/2$ och 1, och den resterande arean är $5 + \frac{3}{2}$. Alltså blir den totala arean av det vänstra området $\frac{3}{2} + 1 + 5 + \frac{3}{2} = 9$. Determinanten av A är $(1/2)^2 \cdot (4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = 5/2$ så det högra området har arean $9 \cdot \frac{5}{2} = 45/2$.

9. Om A, B, C och D är kvadratiska matriser av samma storlek kan vi bilda en större kvadratisk matris som *blockmatrisen*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Antag att A är inverterbar och att matriserna A och C kommuterar med varandra, dvs att $AC = CA$. Visa att **(4 p)**

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

(Du kan använda fritt att om B eller C är noll-matrisen, då gäller att $\det(M) = \det(AD)$.)

Lösningsförslag. Då matrisen A^{-1} existerar kan vi konstruera matrisen

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1}C & I \end{bmatrix},$$

där I är identitetsmatrisen, och 0 är noll-matrisen. Båda av samma storlek som matriserna A, B, C och D. Den konstruerade matrisen har uppenbarligen determinant 1. Detta betyder att matrisen, som ges av produkten,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

har den sökta determinanten $\det(M)$. När vi beräknar produkten ovan erhåller vi matrisen

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -A^{-1}CA + C & -A^{-1}CB + D \end{bmatrix}.$$

Vi använder nu att $CA = AC$. Blocket längst ned till vänster blir då $-A^{-1}CA + C = -A^{-1}AC + C = -C + C = 0$. Vi använder sedan att vi känner till determinanten för blockmatriser där ena blocket är noll, dvs att

$$\det(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -A^{-1}CB + D \end{bmatrix}) = \det(A)\det(-A^{-1}CB + D).$$

Detta betyder att den sökta determinanten är $\det(M) = \det(A)\det(-A^{-1}CB + D)$. Vi vet från kursen att determinanten bevarar produkt, så

$$\det(A)\det(-A^{-1}CB + D) = \det(A(-A^{-1}CB + D)) = \det(-CB + AD).$$

Och då $-CB + AD = AD - CB$ har vi visat påståendet.

KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Solutions for Examn 15.03.13

DEL A

1. The plane H is given by the equation $3x - 2y + 5z + 1 = 0$.
   a) Determine a line N that is perpendicular to H. **(2 p)**
   b) Determine a line L that does not intersect H. **(2 p)**

Solution. a) We know that the vector $\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ is orthogonal to H. Consequently any line of the form $\{P + t \cdot \vec{n} \mid \text{tal } t\}$ is orthogonal to H, for any point P. For instance, we can chose P as the origo, and we have that the line $\begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ 5t \end{bmatrix}$ (parameter t) is orthogonal to H.

b) We chose two points Q and R in the plane H, and construct the vector $\vec{v} = R - Q$. Then any line of the form $\{P + t\vec{v} \mid \text{tal } t\}$ is parallell with the plane H. When we then chose a point P not in the plane, we get a line that does not interesect it. We chose the points

$$Q = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad R = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

that gives $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. And we chose the point $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. This gives us the line

$$\{\begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} \mid \text{scalars } t\}.$$

Answer.

2. Let $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ be the standard basis of $\mathbb{R}^3$. The linear map $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is determined by

$$F(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad F(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $F(\vec{v})$ when $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(1 p)**

(b) Determine the dimension of the kernel $\operatorname{Ker}(F)$, and the dimension of the image $\operatorname{Im}(F)$. **(2 p)**

(c) Determine a basis for the kernel $\operatorname{Ker}(F)$. **(1 p)**

Solution.

(a) The standard matrix of F is $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, so

$$F(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) We Gauss-Jordan eliminate the standard matrix of F to

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Thus the rank of the standard matrix is 2, which also equals the dimension of the image, $\dim \operatorname{Im}(F) = 2$. The dimension of the kernel is then $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Im}(F) + \dim \operatorname{Ker}(F)$, that is $\dim \operatorname{Ker}(F) = 1$.

(b) As $\dim \operatorname{Ker}(F) = 1$ we have that any non-zero vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ such that $F(\vec{v}) = 0$, will be a basis. From (a) it follows that $\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ is a basis.

3. (a) What is an eigenvector? **(1 p)**

(b) Determine which of the following vectors

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

that are eigenvectors for the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. **(2 p)**

(c) Determine eigenvalues and their corresponding eigenspaces of the matrix A. **(1 p)**

Solution.

(a) A vector $\vec{x}$ is an eigenvector for a matrix A means that $\vec{x}$ is non-zero and parallel with $A\vec{x}$, that is there exists a scalar λ such that $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

(b) We multiply the vectors with the matrix A, and check wheter they are parallel with the vectors.

We get

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 26 \end{bmatrix} \quad \text{is not parallel with } \vec{x},$$

$$A\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{is parallel with } \vec{y},$$

$$A\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{is parallel with } \vec{z}$$

and

$$A\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{is not parallel } \vec{y}.$$

We see that $\vec{y}$ and $\vec{z}$ are eigenvectors, whereas $\vec{x}$ are $\vec{w}$ not.

(c) From the calculations in (a) we see that $\vec{y}$ is an eigenvector with eigenvalue 0 and that $\vec{z}$ is an eigenvector with eigenvalue 6. There are at most two eigenvalues of A, so we have found them all. Their corresponding eigenspaces are the lines spanned by $\vec{y}$ and $\vec{z}$.

Answer.

(b) Both $\vec{y}$ and $\vec{z}$ are eigenvectors of A.

(a) The eigenvalue 0 has eigenspace $\mathrm{Span}\{\vec{y}\}$ and 6 has eigenspace $\mathrm{Span}\{\vec{z}\}$.

DEL B

4. In $\mathbb{R}^4$ we have, for each number a, the three following vectors

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

We let $V = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ denote their linear span.

(a) Determine for which numbers a the vector space V has dimension three. **(2 p)**

(b) Let $a = 1$, and determine a basis for the orthogonal complement $V^\perp$. **(2 p)**

Solution.

a) The vector space V has dimension three if and only if the vectors $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ are linearly independent. This again is equivalent with the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 11 \end{bmatrix}$$

having rank three. The rank of the matrix we read off after doing Gauss-Jordan elimination:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & a-4 & -6 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6-3a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The matrix A has rank 3 if and only if $6 - 3a \neq 0$, that is $a \neq 2$. So the vector space V has dimension 3 if $a \neq 2$.

b) The orthogonal complement $V^\perp$ is all vectors $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ that are orthogonal against the three basis vectors

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

That means that $\vec{v}_1 \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0$ and $\vec{v}_3 \cdot \vec{u} = 0$ simultaneously. If we write out the expresseions we get the homogeneous system of linear equations

$$\begin{cases} x + 2y - w = 0 \\ 2x + y + z + 3w = 0 \\ 4x + 2y + 3z + 11w = 0. \end{cases}$$

Elementary row operations on the augemented matrix of the system gives

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

We let $w = t$, and get that $z = -5t$, $y = 0$ and $x = t$. In other words

$$V^{\perp} = \{t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \text{scalars} \quad t\}.$$

And it follows that the vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ is a basis of $V^{\perp}$.

Answer.

5. (a) Define what is meant with the *coordinate vector* of a vector with respect to a basis. **(1 p)**

(b) We have the following vectors in $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Determine a basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^2$ such that the coordinate vector of $\vec{v}$ is $\vec{w}$ and the coordinate vector of $\vec{w}$ is $\vec{v}$. **(3 p)**

Solution. a) Let $\beta = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ be a basis for a vector space V, and let $\vec{x}$ be a vector. Then the vector $\vec{x}$ can be expressed as

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i,$$

for some scalars $a_1, \dots, a_n$. The ordered sequence of scalars

$$[\vec{x}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

is called the coordinate vector of $\vec{x}$ with respect to the basis β.

b) Let $\{\vec{e}, \vec{f}\}$ be the sought basis of $\mathbb{R}^2$. The criteria are that $\vec{v} = \vec{e} - \vec{f}$ and that $\vec{w} = \vec{2} + 2\vec{f}$. We can write these criteria as

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{f} \end{bmatrix}.$$

By inverting the 2×2-matrix, we read off the relations that

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{f} \end{bmatrix}.$$

In other words we have that

$$\vec{e} = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and

$$\vec{f} = -\frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Answer.

6. Let $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ and $\vec{n} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ be two non-zero vectors in $\mathbb{R}^2$, where $ac + bd = 0$. Let L be the linear span of $\vec{v}$.

(a) Why is $\beta = \{\vec{v}, \vec{n}\}$ a basis of $\mathbb{R}^2$? **(1 p)**

(b) Let $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be reflection through L. Determine the matrix representation B of T with respect to β. **(1 p)**

(c) Let P be the change of basis matrix from the standard basis to β. Determine $P^{-1}BP$. **(2 p)**

Solution.

a) The two vectors form a basis if and only if they are linearly independent. Non-zero vectors $\vec{v}$ and $\vec{n}$ are orthogonal since their scalar product $\vec{v} \cdot \vec{n} = ac + bd = 0$. This implies that $\vec{v}$ and $\vec{n}$ form a basis for $\mathbb{R}^2$.

b) The reflection maps the vector $\vec{v}$ to $\vec{v}$ and $\vec{n}$ to $-\vec{n}$. As $T(\vec{v}) = \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{n}$ and $T(\vec{n}) = -\vec{n} = 0 \cdot \vec{v} - 1 \cdot \vec{n}$ we get that the matrix representation is $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) The matrix $Q = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ is the change of basis from β to the standard basis. It follows that $P = Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$. Then we get that

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c \\ b & -a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} ad+bc & -2ac \\ 2bd & -bc-ad \end{bmatrix}.$$

Note: If $b \neq 0$ and we substitute $d = -ac/b$, we can simplify

$$P^{-1}BP = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab \\ 2ab & b^2-a^2 \end{bmatrix}.$$

c') Alternatively: As $P^{-1}BP$ is the standard matrix, we can compute it directly. Let $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ be a vector in $\mathbb{R}^2$. We have that

$$\vec{u} = \operatorname{proj}_L(\vec{u}) + (\vec{u} - \operatorname{proj}_L(\vec{u})).$$

This gives that $T(\vec{u}) = 2\operatorname{proj}_L(\vec{u}) - \vec{u}$. The line L is spanned by $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, and we get that

$$T(\vec{u}) = 2\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} - \vec{u} = 2\frac{ax+by}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2a^2x+2aby}{a^2+b^2} \\ \frac{2abx+2b^2y}{a^2+b^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

It follows that $\begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}$ and the standard matrix is therefore

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} & \frac{2ab}{a^2+b^2} \\ \frac{2ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.$$

DEL C

7. The number sequence $\{f_0, f_1, f_2, f_3, \dots,\}$ satisfies the following recursive formulae

$$f_{n+2} = 2f_{n+1} + 8f_n, \qquad (*)$$

for all integers $n \geq 0$. The two first terms in the sequence are known, $f_0 = a$ and $f_1 = b$. Express f_{n+1} as a closed formula in a and b. (Tip: Denote by $F(n+1) = \begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix}$ and write the equation (*) in matrix form). **(4 p)**

Solution. We have that $F(n+1) = AF(n)$, where

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

It follows that $F(n+1) = A^n F(1)$. If we consider the matrix A as a linear transformation on $\mathbb{R}^2$, we have that $A = PDP^{-1}$ where P is the change of basis matrix from a basis of eigenvectors to the standard basis, and where D is a diagonal matrix with eigenvalues on the diagonal. We will use this to calculate A^n.

The characteristic polynomial of A is $c(\lambda) = (\lambda - 2)\lambda - 8$. The roots are given by

$$0 = c(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 9 = (\lambda - 1)^2 - 9.$$

In other words $\lambda = -2$ and $\lambda = 4$. We then determine the corresponding eigenspaces. With $\lambda = -2$ the eigenspace is given by the equation $x + 2y = 0$. A basis being $\vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. The eigenspace corresponding to the eigenvalue $\lambda = 4$ is given by the equation $x - 4y = 0$. A basis being $\vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. This gives us the change of basis matrices

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

We have that

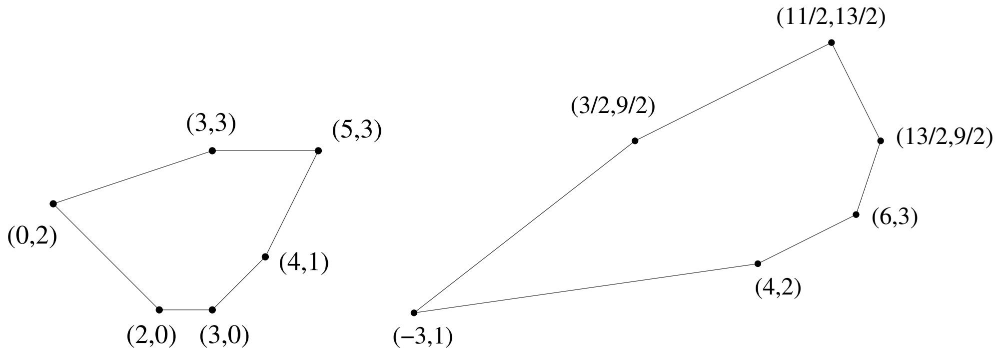
$$\begin{aligned} A^n = PD^nP &= P \begin{bmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{2^n}{6} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2^{n-1}}{3} \begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 2 & 4 \cdot 2^n \\ (-1)^{n+1} & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2^{n-1}}{3} \begin{bmatrix} (-1)^n \cdot 2 + 4 \cdot 2^n & (-1)^{n+1} \cdot 8 + 8 \cdot 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^n \cdot 4 + 2^{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

We have that $F(n+1) = A^n F(1)$, which gives

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{2^{n-1}}{3}\Big(\big((-1)^n \cdot 2 + 4 \cdot 2^n\big)b + \big((-1)^{n+1} \cdot 8 + 8 \cdot 2^n\big)a\Big) \\ &= \frac{2^n}{3}((-1)^n + 2^{n+1})b + \frac{2^{n+2}}{3}((-1)^{n+1} + 2^n)a. \end{aligned}$$

Answer.

8. We have the two following figures (Every point is given by coordinates in a usual Cartesian system).



(a) Determine the matrix of a linear map $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ that transforms the figure on the left hand side, to the figure on the right. **(2 p)**

(b) Determine the area of the figure on the right hand side. **(2 p)**

Solution.

(a) We first figure out which points (corners) in the leftmost figure that are mapped to which point in the figure on the right hand side. We name the following points in the left figure: $\vec{p} := \left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]$, $\vec{q} := \left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]$ and $\vec{r} := \left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]$.

As $\vec{q} = \frac{2}{3}\vec{r}$ and T is linear, we must have $T(\vec{q}) = \frac{2}{3}T(\vec{r})$. The only points in the figure on the right satisfying this relation are $(4,2)$ and $(6,3)$. Thus we need to send $T(\vec{q}) = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ and $T(\vec{r}) = \left[\begin{smallmatrix}6\\3\end{smallmatrix}\right]$. In the left figure $\vec{p}$ is neighbour to $\vec{q}$, so we need that $T(\vec{p})$ is neighbour to$T(\vec{q})$ and therefore we must send $T(\vec{p}) = \left[\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right]$.

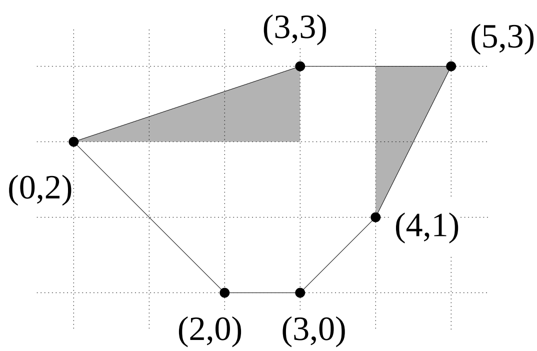
The equations $T(\left[\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right]$ and $T(\left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix}-3\\1\end{smallmatrix}\right]$ together determine the matrix of T as

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

We check our calculations:

$$A\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3/2\\9/2\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11/2\\13/2\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}13/2\\9/2\end{bmatrix}.$$

(b) We can easily compute the area of the leftmost figure by drawing som helpful line segments.



The shadowed triangles have areas $3/2$ and 1, and the remaining area is $5 + \frac{3}{2}$. The total area of the leftmost figure is then $\frac{3}{2} + 1 + 5 + \frac{3}{2} = 9$. The determinant of the matrix A representing the linear map T is $(1/2)^2 \cdot (4 \cdot 1 - (-3) \cdot 2) = 5/2$, so the area of the rightmost figure is $9 \cdot \frac{5}{2} = 45/2$.

9. If A, B, C and D are quadratic matrices of the same size, we can build the bigger quadratic *block matrix*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Assume that A is invertible, and that the matrices A and C commute, that is $AC = CA$. Show that **(4 p)**

$$\det(M) = \det(AD - CB).$$

(You can freely use the fact that if B or C is the zero-matrix, then we have that $\det(M) = \det(AD)$.)

Solution. Since the matrix A^{-1} is assumed to exist, we can construct the matrix

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1}C & I \end{bmatrix},$$

where I is the identity matrix, and 0 is the zero matrix - both of the same size as A, B, C och D. The constructed matrix has obviously determinant 1. This means that the matrix product,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^{-1}C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

has the determinant equal $\det(M)$. When we compute the product we get the matrix

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -A^{-1}CA + C & -A^{-1}CB + D \end{bmatrix}.$$

We now use that $CA = AC$. The block down to the left then becomes $-A^{-1}CA + C = -A^{-1}AC + C = -C + C = 0$. We then use that we know that the determinant of matrices where one block is zero, that is

$$\det(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -A^{-1}CB + D \end{bmatrix}) = \det(A)\det(-A^{-1}CB + D).$$

In other words the sougth determinant is $\det(M) = \det(A)\det(-A^{-1}CB + D)$. From the course we have that the determinant preserves product, so

$$\det(A)\det(-A^{-1}CB + D) = \det(A(-A^{-1}CB + D)) = \det(-CB + AD).$$

And as $-CB + AD = AD - CB$, we have proven the statement.