



KTH Teknikvetenskap

## SF1624 Algebra och geometri Måndagen 19 januari, 2015

Skrivtid: 14.00-19.00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL A

1. För varje tal  $a$  har vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 2x + ay + 3z & = 1 \\ 3x + (a + 1)y + az & = 2. \end{cases}$$

- (a) Bestäm för vilka värden på parametern  $a$  systemet har en lösning; inga lösningar; oändligt många lösningar. **(3 p)**  
 (b) Lös ekvationssystemet när  $a = 1$ . **(1 p)**

2. Betrakta följande vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en ekvation för planet  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ . **(1 p)**  
 (b) Ligger vektorn  $\vec{z}$  i  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ ? **(1 p)**  
 (c) Bildar  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$  en bas för  $\mathbb{R}^3$ ? **(1 p)**  
 (d) Beräkna rangen av matrisen **(1 p)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Anpassa kurvan  $y = ax^2 + bx + c$  med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

**(4 p)**

## DEL B

4. Planet  $H$  ges av ekvationen  $3x - 5y + 3z = 0$ .
- (a) Bestäm en orthonormal (ON) bas  $\beta$  för  $H$ . **(1 p)**
  - (b) Utvidga  $\beta$  till en ON-bas för  $\mathbb{R}^3$ . **(1 p)**
  - (c) Låt  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara ortogonala projektionen på  $H$ . Bestäm en matrisrepresentation för  $T$ . **(2 p)**
5. Enligt *Cayley-Hamiltons sats* gäller att varje kvadratisk matris uppfyller sin egen karaktäristiska ekvation. Betrakta matrisen
- $$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
- (a) Bestäm alla egenvektorer till  $A$  med egenvärde 2. **(1 p)**
  - (b) Beräkna det karaktäristiska polynomet  $P_A(x)$  för matrisen  $A$ . **(2 p)**
  - (c) Verifiera att Cayley-Hamiltons sats gäller för matrisen genom att beräkna  $P_A(A)$ . **(1 p)**
6. Linjen  $L$  i  $\mathbb{R}^3$  går genom origo. En riktningsvektor för linjen bildar vinkeln  $60^\circ$  mot den positiva x-axeln och vinkeln  $45^\circ$  mot den positiva y-axeln. Linjen  $L$  skär planet
- $$x + \sqrt{2}y - 3z = 6$$
- i punkten  $P$ . Bestäm  $P$ . **(4 p)**

---

*Var god vänd!*

## DEL C

7. I datortomografi behöver man kunna hålla reda på alla linjer i planet genom att ge dem *koordinater*. Ett sätt att göra det är genom att till en linje i planet tillordna paret  $(r, \varphi)$  där  $r > 0$  och  $0 \leq \varphi < 2\pi$  fås genom att  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  är den punkt på linjen som ligger närmast origo. Vi är bara intresserade av linjer som inte går genom origo.

(a) Bestäm en ekvation på formen  $ax + by + c = 0$  för linjen med koordinater  $(r, \varphi)$ .

(2 p)

(b) Visa att linjerna  $(r_1, \varphi_1)$  och  $(r_2, \varphi_2)$  är parallella om och endast om

(2 p)

$$\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_1).$$

8. Kurvan  $C$  i  $\mathbb{R}^2$  ges av ekvationen  $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 12 = 0$ . Låt  $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  vara basen med vektorerna

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Visa att koordinatvektorerna  $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$  för vektorer på kurvan  $C$ , med avseende på basen  $\beta$ , satisfierar ekvationen  $z^2 - 4w^2 = 6$ .

(4 p)

9. Låt  $P_n$  vara vektorrummet av polynom  $p(x)$  av grad högst  $n$ . Den linjära avbildningen  $T: P_n \rightarrow P_n$  definieras som

$$T(p(x)) = \frac{1}{x}(p(x) - p(0)).$$

(a) Låt  $n = 3$ . Bestäm matrisrepresentationen till avbildningen  $T$  med avseende på basen  $\{1, x, x^2, x^3\}$ .

(1 p)

(b) Låt  $n = 10$ . Bestäm det minsta heltalet  $m$  sådan att  $T^m = 0$ .

(1 p)

(c) Låt  $n = 100$ . Bestäm alla egenvärden och egenvektorer av avbildningen  $T$ .

(2 p)



**SF1624 Algebra och geometri**  
**Lösningsförslag till tentamen 2015-01-19**

DEL A

1. För varje tal  $a$  har vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ 2x + ay + 3z & = 1 \\ 3x + (a + 1)y + az & = 2. \end{cases}$$

- (a) Bestäm för vilka värden på parametern  $a$  systemet har en lösning; inga lösningar; oändligt många lösningar. **(3 p)**  
 (b) Lös ekvationssystemet när  $a = 1$ . **(1 p)**

**Lösningsförslag.** (a) Systemet har 3 ekvationer och 3 obekanta. Gausselimination ger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 & 1 \\ 3 & a+1 & a & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & a-3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 - r_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koefficientmatrisen har här determinant  $(a - 2)(a - 4)$ , så om  $a \neq 2$  och  $a \neq 4$  har systemet exakt en lösning. Om  $a = 4$  får vi ett konsistent system med en nollrad, så att det finns oändligt många lösningar. Om  $a = 2$  får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket uppenbarligen inte är konsistent; inga lösningar.

(b) När  $a = 1$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

lösningen är  $x = 0, y = 1, z = 0$ .

**Svar.**

2. Betrakta följande vektorer i  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en ekvation för planet  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ . (1 p)  
 (b) Ligger vektorn  $\vec{z}$  i  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ ? (1 p)  
 (c) Bildar  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$  en bas för  $\mathbb{R}^3$ ? (1 p)  
 (d) Beräkna rangen av matrisen (1 p)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Lösningförslag.** (a) Vektorerna  $\vec{v}$  och  $\vec{w}$  är linjärt oberoende, så  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$  är mycket riktigt ett plan (genom origo). En normalvektor till planet är

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left[ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right]^T = [-1, 2, 1]^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En ekvation (i koordinater  $(x_1, x_2, x_3)$ ) är därmed  $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ .

(b) Vi har att  $-1 \cdot 0 + 2(-2) + 4 = 0$ , så  $\vec{z}$  ligger i  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ .

(c) Vi kollar om  $\vec{u}$  ligger i planet:  $-1 + 2 \cdot 2 + 1 = 4 \neq 0$ , så  $\vec{u}$  ligger ej i planet  $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ . Detta medfö att  $\vec{v}, \vec{w},$  och  $\vec{u}$  är 3 linjärt oberoende vektorer i  $\mathbb{R}^3$ , så de bildar en bas för  $\mathbb{R}^3$ .

(d) Matrisen  $A$  har kolonnerna  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u},$  och  $\vec{z}$ . Rangen av matrisen är därmed 3, eftersom kolonnrummet har dimension 3.

**Svar.**

3. Anpassa kurvan  $y = ax^2 + bx + c$  med minstakvadratmetoden till följande tabell av mätdata

x	-1	0	1	2
y	2	0	2	4

(4 p)

**Lösningförslag.** Dessa mätdata ger ett ekvationssystem i  $a$ ,  $b$ , och  $c$ , med utökad matris

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Låt  $\vec{d}$  vara den 4:e kolonnen och skriv  $\vec{x} = [a, b, c]^T$ , då är systemet  $A\vec{x} = \vec{d}$ , där  $A$  är koefficientmatrisen. Vi tittar nu på systemet  $A^T A \vec{x} = A^T \vec{d}$ :

$$A^T A = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T \vec{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Vi löser systemet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 & 20 \\ 8 & 6 & 2 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 9 & 4 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 - 2r_2 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & -3 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 3r_3 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -10 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Så  $b = -\frac{1}{5}$ ; då  $-\frac{7}{5} - c = -2$ , så att  $c = \frac{3}{5}$ ; sedan  $a + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 2$ , så  $a = 1$ .

Kurvan som enligt minstakvadratmetoden är bäst anpassad är  $y = x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$ .

**Svar.**



## DEL B

4. Planet  $H$  ges av ekvationen  $3x - 5y + 3z = 0$ .
- (a) Bestäm en orthonormal (ON) bas  $\beta$  för  $H$ . **(1 p)**
- (b) Utvidga  $\beta$  till en ON-bas för  $\mathbb{R}^3$ . **(1 p)**
- (c) Låt  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  vara ortogonala projektionen på  $H$ . Bestäm en matrisrepresentation för  $T$ . **(2 p)**

**Lösningförslag.** (a) Vi har att  $\dim H = 2$ , så vi ska hitta 2 oberoende vektorer i  $H$  för att få en bas. Genom att sätta  $y = 0$  hittar vi vektorn  $\vec{a} = [1, 0, -1]^T$ ; genom att sätta  $z = 0$  hittar vi vektorn  $\vec{b} = [5, 3, 0]^T$ . De är oberoende, så de bildar en bas för  $H$ .

Med Gram-Schmidt-metoden får vi en ortogonal bas:  $\text{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = t\vec{a}$ , med  $t = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \frac{5}{2}$ ; då bildar  $\vec{a}$  och  $\vec{c} = \vec{b} - t\vec{a} = \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{a} = [\frac{5}{2}, 3, \frac{5}{2}]^T$  en ortogonal bas för  $H$ . Även  $\vec{a}$  och  $2\vec{c} = [5, 6, 5]^T$  gör detta. Till slut får vi en ON-bas genom att dela varje vektor genom sin längd:  $\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} = [\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$  och  $\frac{1}{\sqrt{86}}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{86}}[5, 6, 5]^T$  bildar en ON-bas för  $H$ .

(b) Det är bara att lägga till en enhetsnormalvektor till  $H$ , tex:  $\vec{d} = \frac{1}{\sqrt{43}}[3, -5, 3]^T$ .

(c) Vi vet att  $T(\vec{a}) = \vec{a}$ ,  $T(\vec{c}) = \vec{c}$ , och  $T(\vec{d}) = \vec{0}$ . Så i basen  $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\}$  har  $T$  matrisrepresentationen 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Svar.**

5. Enligt *Cayley-Hamiltons sats* gäller att varje kvadratisk matris uppfyller sin egen karaktäristiska ekvation. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm alla egenvektorer till  $A$  med egenvärde 2. (1 p)  
 (b) Beräkna det karaktäristiska polynomet  $P_A(x)$  för matrisen  $A$ . (2 p)  
 (c) Verifiera att Cayley-Hamiltons sats gäller för matrisen genom att beräkna  $P_A(A)$ . (1 p)

**Lösningförslag.** (a) Vi beräknar nollrummet  $\text{Ker}(A - 2I)$ :

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så nollrummet  $\text{Ker}(A - 2I)$  spänns upp av  $[1 \ -1 \ 0]^T$ . Egenvektorerna med egenvärdet 2 är exakt alla **nollskilda** multipler av denna vektor.

(b) Vi har att

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2 - 2 + \lambda + \lambda + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda - 4.$$

Det karaktäristiska polynomet  $P_A(x)$  är  $x^3 - 6x + 4$ .

(c) Vi beräknar att

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

och att

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 6 \\ -12 & -4 & 6 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Observera att den konstanta termen 4 i polynomet blir  $4A^0 = 4I$ . Vi ser nu att

$$A^3 - 6A + 4I = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 6 \\ -12 & -4 & 6 \\ 6 & 6 & -4 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket stämmer.

**Svar.**

6. Linjen  $L$  i  $\mathbb{R}^3$  går genom origo. En riktningsvektor för linjen bildar vinkeln  $60^\circ$  mot den positiva x-axeln och vinkeln  $45^\circ$  mot den positiva y-axeln. Linjen  $L$  skär planet

$$x + \sqrt{2}y - 3z = 6$$

i punkten  $P$ . Bestäm  $P$ .

(4 p)

**Lösningförslag.** Låt  $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$  vara en normerad riktningsvektor till  $L$  och låt  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  och  $\vec{e}_z$  vara standardbasvektorerna. Då är  $a = \vec{u} \cdot \vec{e}_x = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}_x\| \cdot \cos 60^\circ = 1/2$  och  $b = \vec{u} \cdot \vec{e}_y = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}_y\| \cdot \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ . Eftersom  $\vec{u}$  är normerad har vi att  $c = \pm\sqrt{1 - a^2 - b^2} = \pm 1/2$ .

Låt  $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix}$  som ju är en normalvektor till planet. Om  $c = 1/2$  är  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$  vilket betyder att linjen  $L$  är parallell med planet. Men detta är omöjligt eftersom vi vet att  $L$  skär planet utan att ligga i planet (för planet innehåller inte origo). Alltså är  $c = -1/2$ .

Skärningspunkten  $P$  ligger på linjen  $L$  så den kan skrivas  $P = t\vec{u}$  för något reellt tal  $t$ . Eftersom  $P$  ligger i planet gäller att  $\vec{n} \cdot (t\vec{u}) = 6$  så

$$t = \frac{6}{\vec{n} \cdot \vec{u}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Punkten  $P$  har alltså koordinaterna  $(1, \sqrt{2}, -1)$ .

## DEL C

7. I datortomografi behöver man kunna hålla reda på alla linjer i planet genom att ge dem *koordinater*. Ett sätt att göra det är genom att till en linje i planet tillordna paret  $(r, \varphi)$  där  $r > 0$  och  $0 \leq \varphi < 2\pi$  fås genom att  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  är den punkt på linjen som ligger närmast origo. Vi är bara intresserade av linjer som inte går genom origo.

(a) Bestäm en ekvation på formen  $ax + by + c = 0$  för linjen med koordinater  $(r, \varphi)$ .

(2 p)

(b) Visa att linjerna  $(r_1, \varphi_1)$  och  $(r_2, \varphi_2)$  är parallella om och endast om

(2 p)

$$\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_1).$$

**Lösningförslag.** (a) Låt  $(r, \varphi)$  vara en given linje. Då är  $[r \cos \varphi, r \sin \varphi]^T$  och speciellt  $[\cos \varphi, \sin \varphi]^T$  normalvektorer till linjen. Dvs. vi kan sätta  $a = \cos \varphi$  och  $b = \sin \varphi$ . Linjen går genom punkten  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ; detta ger att  $c = -r$ . Ekvationen blir  $(\cos \varphi)x + (\sin \varphi)y - r = 0$ .

(b) Linjerna  $(r_1, \varphi_1)$  och  $(r_2, \varphi_2)$  är parallella om och endast om deras normalvektorer är parallella. Två vektorer är parallella om och endast om determinanten är noll, dvs. att  $\begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & \sin \varphi_2 \end{vmatrix} = 0$ . Detta är i sin tur ekvivalent med att  $\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) = \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_1)$ .

**Svar.**

8. Kurvan  $C$  i  $\mathbb{R}^2$  ges av ekvationen  $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 12 = 0$ . Låt  $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\}$  vara basen med vektorerna

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Visa att koordinatvektorerna  $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$  för vektorer på kurvan  $C$ , med avseende på basen  $\beta$ , satisfierar ekvationen  $z^2 - 4w^2 = 6$ . **(4 p)**

**Lösningförslag.** Låt  $\sigma$  vara standardbasen. För en vektor  $\vec{p}$  i  $\mathbb{R}^2$  vet vi då att

$$[\vec{p}]_{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [\vec{p}]_{\beta},$$

så koordinatvektorer  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$  för punkter på kurvan i standardbasen är relaterade till koordinatvektorer  $\begin{bmatrix} z & w \end{bmatrix}^T$  enligt följande

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

Vi vet även att

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -12.$$

Nu byter vi ut  $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$  med uttrycket för  $\begin{bmatrix} z & w \end{bmatrix}^T$ . Eftersom

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

får vi ekvationen  $-2z^2 + 8w^2 = -12$  för  $C$ , eller också ekvationen  $z^2 - 4w^2 = 6$  (ekvivalent med den förra).

**Svar.**

9. Låt  $P_n$  vara vektorrummet av polynom  $p(x)$  av grad högst  $n$ . Den linjära avbildningen  $T: P_n \rightarrow P_n$  definieras som

$$T(p(x)) = \frac{1}{x}(p(x) - p(0)).$$

- (a) Låt  $n = 3$ . Bestäm matrisrepresentationen till avbildningen  $T$  med avseende på basen  $\{1, x, x^2, x^3\}$ . **(1 p)**  
 (b) Låt  $n = 10$ . Bestäm det minsta heltalet  $m$  sådan att  $T^m = 0$ . **(1 p)**  
 (c) Låt  $n = 100$ . Bestäm alla egenvärden och egenvektorer av avbildningen  $T$ . **(2 p)**

**Lösningförslag.** (a) Vi har att  $T(1) = 0$ ;  $T(x) = 1$ ;  $T(x^2) = x$ ;  $T(x^3) = x^2$ . Matrisen blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi ser att  $T(x^k) = x^{k-1}$  för  $k \geq 1$ , medan  $T(1) = 0$ . Vi har även att  $T^2(x^k) = x^{k-2}$  för  $k \geq 2$ , medan  $T^2(x^l) = 0$  för  $l < 2$ . På liknande sätt får vi att  $T^9(x^{10}) = x$ ;  $T^{10}(x^{10}) = 1$ ; och  $T^{11}(x^{10}) = 0$ . Självklart gäller även att  $T^{11}(x^k) = 0$  för alla  $k \leq 10$ . Så  $m = 11$  är det minsta heltalet så att  $T^m = 0$ .

(c) Vi inser nu att  $T^{101}$  är noll-avbildningen, dvs.  $T^{101} = 0$ . Om  $\vec{v}$  är en egenvektor med egenvärde  $\lambda$ , då har vi att  $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ . Det följer då att  $T^{101}(\vec{v}) = \lambda^{101}(\vec{v})$ , så  $\lambda^{101} = 0$ , så  $\lambda = 0$ . Med andra ord har vi att 0 är det enda egenvärdet. Eftersom  $T(p_{100}x^{100} + \dots + p_1x + p_0) = p_{100}x^{99} + \dots + p_2x + p_1$ , gäller  $T(p(x)) = 0$  om och endast om  $p_{100} = \dots = p_1 = 0$  om och endast om  $p(x)$  är ett konstant polynom. De enda egenvektorer (nödvändigtvis med egenvärdet 0) är då de konstanta nollskilda polynomen. (Egenrummet har dimension 1.)

---