KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**.................

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Lördag 22/10 2011, kl 9-12

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från ht-11 eller vt-11 och den kursomgång (linje, termin) där poängen erhållits:

☐ *Antal bonuspoäng :* *Kursomgång :*

(3p) **1.** En funktion $y = f(x)$ går genom de tre (x, y) punkterna $(1, 2)$, $(2, 3)$ och $(4, 2)$. Funktionen approximeras genom kvadratisk interpolation.

Vad blir y-värdet då $x = 2$? (1p)

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ något annat

Vad blir y-värdet då $x = 0$? (2p)

- ☐ -1
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ något annat

(2p) **2.** Integralen $\int_0^1 (1 + 8x^3)dx$ approximeras med trapetsvärdet med steget h.

Vad blir trapetsvärdet då $h = 1$? (1p)

- ☐ 3.25
- ☐ 4.5
- ☐ 9
- ☐ något annat

Vad blir trapetsvärdet då $h = 0.5$? (1p)

- ☐ 3.25
- ☐ 4.5
- ☐ 9
- ☐ något annat

(1p) **3.** Som resultat av en MATLAB-beräkning har resultatet $x = 11.4277$ erhållits. En övre gräns för trunkeringsfelet uppskattas till $E_t = 0.5 \cdot 10^{-2}$. Man väljer att avrunda svaret till $x = 11.43$. Hur många korrekta (signifikanta) siffror har svaret $x = 11.43$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

(2p) **4.** Givet ekvationssystemet $\quad x_1^3 - 3x_2^2 = 2.2 \quad x_1 + 2x_2^3 = 3.1$

Ett av Jakobianmatrisens element är 1. Vilket? (1p)

- ☐ $(1, 2)$
- ☐ $(2, 1)$
- ☐ $(1, 3)$
- ☐ $(2, 2)$

En bra startgissning till systemet ges av (1p)

- ☐ $x_1 = 2, x_2 = -1$
- ☐ $x_1 = 2, x_2 = 1$
- ☐ $x_1 = 2, x_2 = 0$
- ☐ $x_1 = 1, x_2 = 1$

(2p) **5.** Approximationen $\frac{(f(x+h)-f(x-h))}{2h}$ till $f'(x)$ är av andra ordningen. Det innebär

- ☐ trunkeringsfelet $E_T \approx ch^2$
- ☐ antalet korrekta decimaler fördubblas då h halveras
- ☐ steget h är proportionellt mot E_T^2
- ☐ noggrannheten beror på $f''(x)$

(3p) **6.** Vid beräkning av en integral med trapetsregeln ger extrapolation noggrannare värden. Vad blir formeln för det extrapolerade trapetsvärdet

a) då $T(h)$ och $T(h/2)$ har beräknats? (2p)

- ☐ $T(h) + (T(h) - T(h/2))/3$
- ☐ $T(h) + (T(h/2) - T(h))/3$
- ☐ $T(h/2) + (T(h) - T(h/2))/3$
- ☐ $T(h/2) + (T(h/2) - T(h))/3$

b) då $T(h)$ och $T(h/4)$ har beräknats? (1p)

- ☐ $T(h) + (T(h) - T(h/4))/16$
- ☐ $T(h/4) + (T(h/4) - T(h))/16$
- ☐ $T(h/4) + (T(h/4) - T(h))/15$
- ☐ $T(h) + (T(h/4) - T(h))/15$

(2p) **7.** För en differentialekvation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ vet man att en lösningskurva går genom punkten $x = a, y = b$ med lutningen k i denna punkt.

Antag att $a = 1, b = 2, k = 0.6$. Vad blir $y(1.5)$ om Eulers metod med steget $h = 0.5$ används? (1p)

- ☐ 2.6
- ☐ 2.35
- ☐ 2.3
- ☐ 3.3

Antag att b och k ej kan anges exakt utan har osäkerheter: $b = 2 \pm 0.2$ och $k = 0.6 \pm 0.1$. Vad blir felgränsen E_y i värdet $y(1.5)$ på grund av osäkerheterna i b och k under förutsättning att Eulers metod, steget $h = 0.5$ har använts för att beräkna $y(1.5)$? (1p)

- ☐ $E_y = 0.3$
- ☐ $E_y = 0.2$
- ☐ $E_y = 0.25$
- ☐ $E_y = 0.1$

(2p) **8.** Man vill lösa ett randvärdesproblem $y''(x) = f(x), y(0) = 1, y(2) = 0, 0 \leq x \leq 2$ genom att använda FDM (finita differensmetoden) med centraldifferens och steget $h = 0.1$. Om randvillkoren sätts in i de ekvationer som erhålles då FDM tillämpas erhålles ett linjärt ekvationssystem $Au = b$.

Vilken struktur har matrisen A? (1p)

- ☐ diagonal
- ☐ tridiagonal
- ☐ triangulär
- ☐ fylld

Vilken dimension har matrisen A? (1p)

- ☐ 19×19
- ☐ 20×20
- ☐ 21×21
- ☐ 21×19

9. Differentialekvationen

$$y''' + 0.5yy'' + (y')^2 = sin(x), \quad 0 \leq x \leq 5$$

(3p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (1.5p)

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ det är omöjligt att säga.

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1.5p)

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ det är omöjligt att säga.

Tentamen i Numeriska metoder för

DN1212,DN1214,DN1215.DN1240.DN1241,DN1243

Lördag 22/10 2011, kl 9-12

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser: 10-19:D, 20-29:C, 30-39:B, 40-50:A

(6) **P1.** Begreppet "lokal approximation med rät linje" är en bakomliggande idé till många numeriska metoder. Klargör för följande metoder vad det är för linje som avses och var den lokala approximationen med rät linje görs. Förklara begreppen *kortfattat* och med en figur som visar approximationsprincipen.

a) Trapetsregeln för beräkning av en bestämd integral $\int_a^b f(x)dx$
b) Eulers metod för lösning av en differentialekvation $\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(a) = y_0$
c) Sekantmetoden för lösning av ekvationen $f(x) = 0$.

(12) **P2.** En takkupol har formen av ytan på en halvsfär. Genom mätningar av höjden z_i i olika punkter (x_i, y_i) vill man bestämma mittpunkten (a, b, c) och radien R i sambandet

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Följande mätvärden är givna:

x	5	7	8	10	12	14	15
y	5	2	13	7	11	3	12
z	10	8	10	13	12	8	9

Skissera Gauss-Newtons algoritm, gärna med ett MATLAB-program. för minstakvadratanpassning av mittpunktskoordinaterna och radien till de givna mätvärdena. Hur erhålles ett bra startvärde för iterationerna?

(16) P3. Givet differentialekvationen

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = 1, \quad 1 \le x \le 4$$

(8) a) Antag att begynnelsevärden är givna som $y(0) = 1$,$y'(0) = 0.5$. Skissera ett MATLAB-program som löser differentialekvationen på det givna intervallet. Basera programmet på Eulers metod, steget h. Lösningskurvan $y(x)$ ska ritas upp i en graf och värdet på $y(4)$ ska skrivas ut. Slutligen ska integralen

$$\int_0^4 y(x)dx$$

beräknas med trapetsregeln och skrivas ut.

(8) b) Antag att randvärden är givna som $y(0) = 1$,$y(4) = -1$. För ett givet steg h, definiera ett nät $x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, ..., N$, där $Nh = 4$. Approximera derivatorna med centraldifferenser:

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}, \qquad y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

Skissera det ekvationssystem $Ay = b$ som erhålles då finita differensmetoden används för att approximera differentialekvationen. Vilken struktur och vilken dimension har matrisen A? MATLAB-program begärs EJ.

(16) P4. Givet följande ekvationssystem

$$x^2 + y^2 = 2.12, \qquad y^2 - x^2y = 0.03 \qquad (*)$$

Ekvationssystemet kan lösas antingen genom att använda Newtons metod direkt på systemet sådant det är givet eller genom att eliminera x. I det senare alternativet erhålles en tredjegradsekvation i y, som kan lösas med Newton-Raphsons metod.

(8) a) Genomför EN iteration med Newtons metod på systemet $(*)$ med startvärdet $x_0 = 1, y_0 = 1$. Redovisa speciellt iterationsformeln, ekvationssystmet för korrektionen, korrektionen uträklnad samt nästa iterat.

(2) b) Med startvärdet $x_0 = 0, y_0 = 0$ fungerar inte Newtons metod. Förklara varför!

(6) c) Eliminera x ur ekvationerna och ange den tredjegradsekvation i y som erhålles. Gör EN iteration med Newton-Raphsons metod, startvärde $y_0 = 1$. Redovisa även här iterationsformel, korrektionen uträknad samt nästa iterat.

KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**..................

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Lördag 22/10 2011, kl 9-12

(3p) **1.** En funktion $y = f(x)$ går genom de tre (x, y) punkterna $(1, 2)$, $(2, 3)$ och $(4, 2)$. Funktionen approximeras genom kvadratisk interpolation.

Vad blir y-värdet då $x = 2$? (1p)

☐ 3

Vad blir y-värdet då $x = 0$? (2p)

☐ 0

(2p) **2.** Integralen $\int_0^1 (1 + 8x^3)dx$ approximeras med trapetsvärdet med steget h.

Vad blir trapetsvärdet då $h = 1$? (1p)

☐ något annat

Vad blir trapetsvärdet då $h = 0.5$? (1p)

☐ något annat

(1p) **3.** Som resultat av en MATLAB-beräkning har resultatet $x = 11.4277$ erhållits. En övre gräns för trunkeringsfelet uppskattas till $E_t = 0.5 \cdot 10^{-2}$. Man väljer att avrunda svaret till $x = 11.43$. Hur många korrekta (signifikanta) siffror har svaret $x = 11.43$?

☐ 3

(2p) **4.** Givet ekvationssystemet $x_1^3 - 3x_2^2 = 2.2$ $x_1 + 2x_2^3 = 3.1$

Ett av Jakobianmatrisens element är 1. Vilket? (1p)

☐ $(2, 1)$

En bra startgissning till systemet ges av (1p)

denna deluppgift ströks, 13p för godkänt

(2p) **5.** Approximationen $\frac{(f(x+h)-f(x-h))}{2h}$ till $f'(x)$ är av andra ordningen. Det innebär

☐ trunkeringsfelet $E_T \approx ch^2$

(3p) **6.** Vid beräkning av en integral med trapetsregeln ger extrapolation noggrannare värden. Vad blir formeln för det extrapolerade trapetsvärdet

a) då $T(h)$ och $T(h/2)$ har beräknats? (2p)

☐ $T(h/2) + (T(h/2) - T(h))/3$

b) då $T(h)$ och $T(h/4)$ har beräknats? (1p)

☐ $T(h/4) + (T(h/4) - T(h))/15$

(2p) **7.** För en differentialekvation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ vet man att en lösningskurva går genom punkten $x = a, y = b$ med lutningen k i denna punkt.

Antag att $a = 1, b = 2, k = 0.6$. Vad blir $y(1.5)$ om Eulers metod med steget $h = 0.5$ används? (1p)

☐ 2.3

Antag att b och k ej kan anges exakt utan har osäkerheter: $b = 2 \pm 0.2$ och $k = 0.6 \pm 0.1$. Vad blir felgränsen E_y i värdet $y(1.5)$ på grund av osäkerheterna i b och k under förutsättning att Eulers metod, steget $h = 0.5$ har använts för att beräkna $y(1.5)$? (1p)

☐ $E_y = 0.25$

(2p) **8.** Man vill lösa ett randvärdesproblem $y''(x) = f(x), y(0) = 1, y(2) = 0, 0 \leq x \leq 2$ genom att använda FDM (finita differensmetoden) med centraldifferens och steget $h = 0.1$. Om randvillkoren sätts in i de ekvationer som erhålles då FDM tillämpas erhålles ett linjärt ekvationssystem $Au = b$.

Vilken struktur har matrisen A? (1p)

☐ tridiagonal

Vilken dimension har matrisen A? (1p)

☐ 19×19

9. Differentialekvationen

$$y''' + 0.5yy'' + (y')^2 = sin(x), \quad 0 \leq x \leq 5$$

(3p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (1.5p)

☐ 3

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1.5p)

☐ 3