KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**.................

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Lördag 19/3 2011, kl 9-12

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från vt-09 (senare hälften) ht-09 eller vt-10, och den kursomgång (linje, termin) där poängen erhållits

(1p) **1.** Som resultat av en MATLAB-beräkning har resultatet $x = 1.2362$ erhållits, En övre gräns för trunkeringsfelet uppskattas till $E_t = 4 \cdot 10^{-3}$. Man väljer att avrunda svaret till $x = 1.24$.

Hur många korrekta decimaler har svaret $x = 1.24$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

(3p) **2.** En funktion $y = f(x)$ går genom de tre punkterna $(1, 2)$, $(2, 3)$ och $(3, 1)$. Funktionen approximeras genom styckvis linjär interpolation.

Vad blir y-värdet då $x = 1.5$?

- ☐ 1.2
- ☐ 2.0
- ☐ 2.5
- ☐ 2.8
- ☐ något annat

Vad blir y-värdet då $x = 2.4$?

- ☐ 2.0
- ☐ 2.4
- ☐ 1.8
- ☐ 1.6
- ☐ något annat

(3p) **3.** Integralen $\int_0^1 \frac{cos(\pi x)}{x+1} dx$ approximeras med trapetsvärdet, $T(h)$ för stegen $h = 0.5$, $h = 0.25$ och $h = 0.125$. För de mindre stegen erhålles $T(0.25) = 0.1029$ resp $T(0.125) = 0.0979$

Vad blir trapetsvärdet för $h = 0.5$? (2p)

- ☐ 0.125
- ☐ 0.250
- ☐ 0.375
- ☐ 0.500

Vad blir det extrapolerade värdet från $T(0.25)$ och $T(0.125)$? (1p)

- ☐ 0.0979
- ☐ 0.0929
- ☐ 0.0996
- ☐ 0.0962

(3p) **4.** Roten till en ekvation $f(x) = 0$ beräknas med sekantmetoden och Newton-Raphsons metod.

För sekantmetoden används startvärdena $x_0 = 1$ och $x_1 = 2$ för vilka $f(x_0) = -0.2$ och $f(x_1) = -0.1$. Vad blir nästa iterat x_2? (1p)

- ☐ 1.0
- ☐ 2.9
- ☐ 3.0
- ☐ 3.4

För Newton-Raphsons metod används startvärdet $x_0 = 1$ för vilket $f(x_0) = -0.2$ och $f'(x_0) = 0.5$. Vad blir nästa iterat x_1? (2p)

- ☐ 1.4
- ☐ 0.6
- ☐ 3.5
- ☐ 3.0

5. Trapetsvärdet $T(h)$ (där h är steglängden) för beräkning av en integral $I = \int_a^b f(x)dx$ har
(2p) noggrannhetsordningen två. Detta innebär

- [ ] Integralen kan skrivas om som en andra ordningens differentialekvation
- [ ] Felet $\epsilon(h) = T(h) - I$ är i stort sett proportionellt mot h^2.
- [ ] Resultatet av beräkningen blir ett polynom av andra graden.
- [ ] Felet avtar med en faktor två då steglängden halveras.

6. En rät linje $y = kx + m$ ska anpassas till (x, y)-punkterna $(-1, 1)$, $(0, 0)$ och $(1, 2)$ i minsta
(3p) kvadratmetodens mening.

Vad blir k och m? (2p)

- [ ] $k = 0.5, m = 1$
- [ ] $k = 0.5, m = 0$
- [ ] $k = 1, m = 0.5$
- [ ] $k = 0, m = 0.5$

Vad blir residualvektorn? (1p)

- [ ] $(0.5, -1, 0.5)^T$
- [ ] $(1, 0, -1)^T$
- [ ] $(1, -1)^T$
- [ ] $(1.5, -0.5, 0.5)^T$

7. Man vill lösa ett randvärdesproblem $u''(x) = f(x), u(0) = 1, u(1) = 0, 0 \le x \le 1$ genom att använda FDM (finita differensmetoden) med centraldifferens och steget $h = 0.1$. Om randvillkoren sätts in i de ekvationer som erhålles då FDM tillämpas erhålles ett linjärt
(2p) ekvationssystem $Au = b$.

Vilken dimension har matrisen A?

- [ ] 12×12
- [ ] 10×9
- [ ] 9×9
- [ ] 8×8

Vilken struktur har matrisen A?

- [ ] diagonal
- [ ] tridiagonal
- [ ] triangulär
- [ ] fylld

8. Differentialekvationen

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (\frac{dy}{dx})^2 + y^2 + x - 5$$

(3p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (2p)

- [ ] 2
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] det är omöjligt att säga.

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

- [ ] 2
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 5
- [ ] det är omöjligt att säga.

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243

Lördag 19/3 2011, kl 9-12

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

1. Ekvationslösning

Givet ekvationen $e^x + ax = 0.5$, där $a > 0$ är en parameter.

(2) a. Motivera med en geometrisk figur eller på annat sätt att ekvationen har endast en rot α och att den är negativ.

(3) b. Formulera Newtons metod för ekvationen och beskriv en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som för $a = 1$ beräknar roten α med 4 korrekta decimaler utifrån startvärdet $x_0 = -0.2$.

(3) c. Om ekvationen skrivs om på formen $x = 0.5 - e^x$ kan fixpunktsmetoden användas. Formulera metoden och avgör om den kommer att konvergera eller inte. Startvärdet x_0 i b) är en hyfsad approximation till roten. $e^{x_0} \approx 0.8$.

(4) d. Antag att parametern a har en osäkerhet: $a = 1.0 \pm 0.05$. Beskriv hur osäkerheten E_α i α kan beräknas och utöka algoritmen i uppgift b) så att även α's osäkerhet beräknas.

2. Derivata-approximation

Givet en tabell över en funktion $y = f(x)$, där x_i-värdena är givna ekvidistant i intervallet $[0, 1]$.

i:	1	2	3	4	5
x_i:	0	0.25	0.50	0.75	1
y_i:	0	0.24	0.46	0.68	0.87

Vi vill beräkna en approximation till derivatan i intervallets vänstra ändpunkt, dvs $f'(0)$.

(3) a. Ange en differensformel med noggranhetsordningen 1 för beräkning av $f'(0)$. Beräkna två approximationer till derivatan $f'(0)$ genom att tillämpa formeln på tabellvärdena för steglängderna $h = 0.25$ och $h = 0.5$.

(3) b. För att få högre noggrannhetsordning kan man alternativt använda differensformeln

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h}$$

Använd denna formel för att beräkna $f'(0)$ med användning av tabellvärdena, för $h = 0.25$ och $h = 0.5$.

(3) c. Antag att man vet det exakta svaret: $f'(0) = 1.01$. Beräkna trunkeringsfelen för de två approximativa värden du räknat fram i a). Verifiera att formeln i a) har noggranhetsordningen 1. - Gör samma sak för de två approximativa värden du räknat fram i b) och avgör vilken noggrannhetsordning formeln i b) har.

(3) d. Använd Taylorutveckling för att bestämma noggrannhetsordningen för formeln i b).

3. Följande begynnelsevärdesproblem är givet

$$\ddot{u} + \dot{u} + u = t,\ u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0, \quad (*) \quad , \text{där } \dot{u} = \frac{du}{dt}, \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$$

(2) **a.** Skriv om differentialekvationen $(*)$ som ett system på vektorform av två första ordningens differentialekvationer. Ange även begynnelsevektorn.

(4) **b.** Formulera Eulers metod (även kallad framåt Euler) för systemet i a) och beräkna sedan $\dot{u}(1)$ med användning av steglängden $h = 0.5$.

(8) **c.** Följande integral är kopplad till problemet $(*)$:

$$z(t) = \int_0^t ((u(s))^2 + (\dot{u}(s))^2) ds$$

Skissera en algoritm gärna i form av ett Matlabprogram som 1) löser differentialekvationen på tidsintervallet $[0, 10]$ t ex med Matlabs ODE-lösare ode45, därefter beräknar $z(t)$ på samma tidsintervall samt slutligen plottar $u(t)$ och $z(t)$ i samma diagram.
Ledning: Tänk på trapetsregeln, men med variabelt steg.

4. Betrakta sambandet

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{-kx^2}}{1 + x^2} dx = 0.5$$

Strukturera en algoritm för numerisk beräkning av parametern k.

(3) **a.** Problemet att bestämma k kan ses som en syntes av numeriska metoder. Vilka numeriska metoder är lämpliga?

(3) **b.** Parameters k måste bestämmas med iteration. Ange någon metod att hitta ett startvärde till k.

(3) **c.** Inför lämpliga beteckningar och formulera en algoritm. Programkod behövs EJ!

(3) **d.** Vilka trunkeringsfel påverkar noggrannheten i det numeriskt bestämda k-värdet? Diskutera hur trunkeringsfelen i metoderna bidrar till en felgräns i k-värdet.

Lördag 19/3 2011, kl 9-12

1. Som resultat av en MATLAB-beräkning har resultatet $x = 1.2362$ erhållits, En övre gräns för trunkeringsfelet uppskattas till $E_t = 4 \cdot 10^{-3}$. Man väljer att avrunda svaret till $x = 1.24$. (1p)

Hur många korrekta decimaler har svaret $x = 1.24$?

☐ 1

2. En funktion $y = f(x)$ går genom de tre punkterna $(1, 2)$, $(2, 3)$ och $(3, 1)$. Funktionen approximeras genom styckvis linjär interpolation. (3p)

Vad blir y-värdet då $x = 1.5$?

☐ 2.5

Vad blir y-värdet då $x = 2.4$?

☐ något annat

3. Integralen $\int_0^1 \frac{cos(\pi x)}{x+1} dx$ approximeras med trapetsvärdet, $T(h)$ för stegen $h = 0.5$, $h = 0.25$ och $h = 0.125$. För de mindre stegen erhålles $T(0.25) = 0.1029$ resp $T(0.125) = 0.0979$ (3p)

Vad blir trapetsvärdet för $h = 0.5$? (2p)

☐ 0.125

Vad blir det extrapolerade värdet från $T(0.25)$ och $T(0.125)$? (1p)

☐ 0.0962

4. Roten till en ekvation $f(x) = 0$ beräknas med sekantmetoden och Newton-Raphsons metod. (3p)

För sekantmetoden används startvärdena $x_0 = 1$ och $x_1 = 2$ för vilka $f(x_0) = -0.2$ och $f(x_1) = -0.1$. Vad blir nästa iterat x_2? (1p)

☐ 3.0

För Newton-Raphsons metod används startvärdet $x_0 = 1$ för vilket $f(x_0) = -0.2$ och $f'(x_0) = 0.5$. Vad blir nästa iterat x_1? (2p)

☐ 1.4

5. Trapetsvärdet $T(h)$ (där h är steglängden) för beräkning av en integral $I = \int_a^b f(x)dx$ har noggrannhetsordningen två. Detta innebär (2p)

☐ Felet $\epsilon(h) = T(h) - I$ är i stort sett proportionellt mot h^2.

6. En rät linje $y = kx + m$ ska anpassas till (x, y)-punkterna $(-1, 1)$, $(0, 0)$ och $(1, 2)$ i minsta kvadratmetodens mening. (3p)

Vad blir k och m? (2p)

☐ $k = 0.5, m = 1$

Vad blir residualvektorn? (1p)

☐ $(0.5, -1, 0.5)^T$

7. Man vill lösa ett randvärdesproblem $u''(x) = f(x), u(0) = 1, u(1) = 0, 0 \leq x \leq 1$ genom att använda FDM (finita differensmetoden) med centraldifferens och steget $h = 0.1$. Om randvillkoren sätts in i de ekvationer som erhålles då FDM tillämpas erhålles ett linjärt ekvationssystem $Au = b$. (2p)

Vilken dimension har matrisen A?

☐ 9×9

Vilken struktur har matrisen A?

☐ tridiagonal

8. Differentialekvationen

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (\frac{dy}{dx})^2 + y^2 + x - 5$$

skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer. (3p)

n blir .. (2p)

☐ 3

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

☐ 3

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243

Lördag 19/3 2011, kl 9-12

DEL 2 Lösningar

1. Ekvationslösning

a. Skissera i samma xy-koordinatsystem de två kurvorna $y = e^x \quad (1)$ och $y = 0.5 - ax \quad (2)$. Kurvan (1) skär y-axeln i punkten $(0, 1)$ och har hela tiden positiv lutning. Den räta linjen (2) skär y-axeln i punkten $(0, 0.5)$ och har hela tiden negativ lutning ($a > 0$). Från figuren ser man att kurvorna skär varandra i en punkt där $x < 0$. Denna punkt är just roten α.

b. $x_{n+1} = x_n - (e^{x_n} + ax_n - 0.5)/(e^{x_n} + a), \quad x_0 = -0.2$. MATLAB-program, se t ex EXSamlingen Ex. 2.6.

c. $x_{n+1} = F(x_n)$. I vårt fall $x_{n+1} = 0.5 - e^{x_n}$. Konvergerar om $|F'(\alpha)| < 1$. I vårt fall $|-e^{-0.2}| \approx 0.8 < 1$, dvs konvergerar.

d. Gör störningsräkning: Lös först problemet för $a = 1.0$ vilket ger rotvärdet α. Lös sedan problemet för $a = 1.05$ vilket ger rotvärdet α_{st}. $E_\alpha = |\alpha - \alpha_{st}|$.

2. Derivata-approximation

a. $f'(0) = D_1(h) + O(h)$, där $D_1(h) = (f(h) - f(0))/h$. $D_1(0.25) = (0.24 - 0)/0.25 = 0.96$, $D_1(0.5) = (0.46 - 0)/0.5 = 0.92$

b. Låt $D_2(h) = (-f(2h) + 4f(h) - 3f(0))/2h$. $D_2(0.25) = (-0.46 + 4 \cdot 0.24 - 0)/0.5 = 1$ och $D_2(0.5) = (-0.87 + 4 \cdot 0.46 - 0)/1 = 0.97$

c. Trunkeringsfelen för formeln i a) blir $|0.96 - 1.01| = 0.05$ resp $|0.92 - 1.01| = 0.09$. Felet är (nästan) proportionellt mot h, dvs noggrannhetsordningen är ett.

För formeln i b) $|1 - 1.01| = 0.01$ resp $|0.97 - 1.01| = 0.04$. Felet minskar med en faktor 4 när steget halveras, dvs noggrannhetsordningen är två.

d. $D_2(h) = (-(f(x) + 2hf'(x) + (4h^2/2)f''(x) + O(h^3)) + 4(f(x) + hf'(x) + (h^2/2)f''(x) + O(h^3)) - 3f(x))/2h = f'(x) + O(h^3)/2h = f'(x) + O(h^2)$

3. Följande begynnelsevärdesproblem är givet

a. Låt $y_1 = u$ och $y_2 = \dot{u}$. Då erhålles systemet på vektorform:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad y_1(0) = 1, \qquad \dot{y}_2 = -y_1 - y_2 + t, \quad y_2(0) = 0$$

b. Eulers metod på systemet i a) blir

$$y_1^{(k+1)} = y_1^{(k)} + hy_2^{(k)}, \quad y_1^{(0)} = 1, \qquad y_2^{(k+1)} = y_2^{(k)} + h(-y_1^{(k)} - y_2^{(k)} + t_k), \quad y_2^{(0)} = 0$$

Vi får $y_1^{(1)} = 1 + 0.5 \cdot 0 = 1, \quad y_2^{(1)} = 0 + 0.5 \cdot (-1 - 0 + 0) = -0.5, \quad t_1 = 0.5$ och efter ännu ett steg $y_1^{(2)} = 1 + 0.5 \cdot (-0.5) = 0.75, \quad y_2^{(2)} = -0.5 + 0.5 \cdot (-1 + 0.5 + 0.5) = -0.5, \quad t_2 = 1$. Dvs $\dot{u}(1) = -0.5$ med Eulers metod.

c. Två olika metoder:

1) derivera integralrelationen så erhålles $\dot{z}(t) = u(t)^2 + \dot{u}(t)^2, \quad z(0) = 0$. Låt $y_3 = z$ så fås en tredje diff.ekv till systemet i a): $\dot{y}_3 = y_1^2 + y_2^2, \quad y_3(0) = 0$. Detta system av tre första ordningen diff.ekv kan lösas med t ex ODE45.

2) Lös först systemet i a) med ODE45. Då erhålles 3 lösningskolumner; en med t-värdena och två kolumner med u- och $\dot{u}$-värdena, bägge uträknade i de t-värden som anges i den första kolumnen. Låt kolumnen $t = (t_0, t_1, t_2, ..., t_N)^T$, där $t_0 = 0$ och $t_N = 10$. Då fås med trapetsregeln $z(t_0) = 0, z(t_1) = (t_1 - t_0) \cdot ((u_0^2 + \dot{u}_0^2)/2 + (u_1^2 + \dot{u}_1^2)/2), z(t_2) = z(t_1) + (t_2 - t_1) \cdot ((u_1^2 + \dot{u}_1^2)/2 + (u_2^2 + \dot{u}_2^2)/2), z(t_3) = z(t_2) + (t_3 - t_2) \cdot ((u_2^2 + \dot{u}_2^2)/2 + (u_3^2 + \dot{u}_3^2)/2), ...$ Slutligen plottas $u(t)$ och $z(t)$ som funktion av t på t-intervallet $[0, 10]$.

4. a. Approximera integralen med trapetsregeln steget h så erhålles en summa $T(h, k)$ med termer av typ $he^{-kx_i^2}/(1 - x_i^2)$ där summationen görs över i. I denna summa ingår parametern k som enda obekanta. Lös ekvationen $T(h, k) - 0.5 = 0$ med Newton-Raphsons metod (eller sekantmetoden).

b. 1) Beräkna integralen med trapetsregeln med givet värde på h i en slinga för olika värden på k i intervallet $[0, K]$, där K väljs så att integralen blir mindre än 0.5. Välj det k-värde som ger ett integralvärde närmast 0.5.

2) (alternativ) Antag att $e^{-kx^2} \approx 1 - kx^2/2$ gäller med hyfsad noggrannhet för x i intervallet $[-1, 1]$. Då kan vi bestämma integralen analytiskt och får fram en ekvation i k som ger ett värde $k \approx 3$.

c. 1) Ge en steglängd h 2) Ge k ett startvärde. 3) Inför en while-slinga som kör så länge som korrektionen till k är större än säg 10^{-5}. 4) För k-värdet bilda trapetssumman $T(h, k)$ och dess derivata med avs på k. 5) Gör Newton-Raphson iteration, dvs uppdatera k. 6) Gå tillbaks till 3). 7) När korrektionen blivit tillräckligt liten, gå till 1) och ge en mindre steglängd, t ex $h/2$. Kör slingan 2)-6) igen men använd föregående k-värde som startvärde. Avbryt när skillnaden mellan två k-värden från två succesiva h-värdenstegen blivit tillräckligt liten.

d. Trunkeringsfel från trapetsvärdena samt Newton-iterationerna. Felet från Newton kan göras godtyckligt litet i den inre slingan. Trunkeringsfelet från trapetsvärdena kan också göras godtyckligt litet om steget halveras tillräckligt många gånger. Man kan även pröva med extrapolation för att förbättra noggrannheten.