KTH-
Matematik,Na

Namn: ....

Personnr: ....
Program, Årskurs:................. **Bonuspoäng:**.................

DN1212,DN1214, DN1240-41, DN1243, SF1516-19, SF1541, SF1543
LÖSNING Tentamen i Numeriska metoder , Onsdag 2015-01-08, 9–12

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

(3p) **1.** Givet följande approximationsformel

$$f'(a) \approx \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h}$$

för derivatan av en funktion $f(x)$. Felet i formeln bestäms med Taylorutveckling till

- [ ] $h^2 f''(a)$
- [x] $hf''(a)$
- [ ] $h^2 f'''(a)$
- [ ] $h^4 f'''(a)$
- [ ] $2h^2 f''(a)$
- [ ] $2hf''(a)$
- [ ] $2h^2 f'''(a)$
- [ ] $2h^4 f'''(a)$

(3p) **2.** För att beräkna $\sqrt[3]{3}$ så formuleras ekvationen

$$x^3 - 3 = 0,$$

Newtons metod använd på denna ekvation kan skrivas

- [ ] $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\frac{1}{x_n^3}$
- [x] $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^2}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{x_n^3}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{3}{x_n^3}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2x_n}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2x_n}$

3. Vi vet att $\sqrt[3]{3} = 1.44$ med två korrekta decimalers noggrannhet. Antag att vi använder startvärdet $x_0 = 1.44$ i Newtons metod i tal 2. Hur stort blir felet efter tre iterationer,
(2p) dvs $x_3 - \sqrt[3]{3}$

- [ ] 10^{-2}
- [ ] 10^{-3}
- [ ] 10^{-4}
- [ ] 10^{-6}
- [ ] 10^{-8}
- [ ] 10^{-12}
- [x] 10^{-16}

(3p) **4.** Minstakvadratanpassning görs av ett tredjegradspolynom till givna mätdata y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 vid x-värdena x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Problemet leder till ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{z} \approx \mathbf{b}$. Vilka påståenden nedan är sanna? Residualvektorn betecknas med $\mathbf{r}$.

a.

- [ ] $\mathbf{r}$ har 2 komponenter
- [ ] $\mathbf{r}$ har 3 komponenter
- [ ] $\mathbf{r}$ har 4 komponenter
- [x] $\mathbf{r}$ har 5 komponenter

b.

- [ ] A har 2 rader
- [ ] A har 3 rader
- [ ] A har 4 rader
- [x] A har 5 rader

c.

- [ ] A har 2 kolumner
- [ ] A har 3 kolumner
- [x] A har 4 kolumner
- [ ] A har 5 kolumner

5. Givet en vektorvärd funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2/4 + xy - 4.01 \\ 2x^5y^2 + x - 2y^3/3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2p) För att kunna använda Newtons metod på systemet $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$ behöver vi beräkna Jakobianen

Namn: ....**Personnr:** ....

till funktionen. Låt startgissningen till Newtons metod vara $x_0 = 1, y_0 = 2$. Värdet av elementet på andra raden, andra kolumen av Jakobianen är

- [ ] 8
- [ ] 101
- [ ] 21
- [x] 0
- [ ] 4.01
- [ ] 4

(2p) **6.** Följande tabell är given.

x	1000.2	1000.3	1000.6
y	1000	1010	1280

Med Newtons ansats för det interpolationspolynom $P(x)$ som går genom samtliga punkterna erhålls andragradskoefficienten

- [ ] 10
- [ ] -1000.2
- [ ] 100
- [ ] 1280
- [ ] 200
- [x] 2000
- [ ] 1000
- [ ] 10000

(1p) **7.** Vad blir värdet av interpolationspolynomet i uppgift 1. då x=1000.6?

- [ ] 10
- [ ] -1000.2
- [ ] 100
- [x] 1280
- [ ] 200
- [ ] 2000
- [ ] 1000
- [ ] 10000

8. En dator löser ett tridiagonalt linjärt ekvationssystem med 100 ekvationer och 100 obekanta på 0.4 sekunder. Hur många sekunder tar det för samma dator att lösa ett tridiagonalt

(2p) system med 5000 ekvationer och obekanta?

- [ ] 0.5
- [ ] 2
- [ ] 5
- [ ] 12.5
- [x] 20
- [ ] 50
- [ ] 125
- [ ] 250

9. Givet differentialekvationen

$$\frac{dz}{dt} - 10z^2 = -10, \qquad z(0) = -1,$$

(2p) Vi löser problemet med Eulers metod med steglängden h=0.01. Efter 100 steg blir lösningen $z_{100} \approx z(1)$ enligt nedan

- [ ] 10
- [ ] -0.01
- [ ] 1
- [x] -1
- [ ] 0
- [ ] -10

Na, Matematik, KTH

DN1212,DN1214, DN1240-41, DN1243, SF1516-19, SF1541, SF1543
Tentamen i Numeriska metoder , Onsdag 2015-01-08, 9–12

P1. Följande tabellvärden är givna

x	801	803	805	806
y	102	110	126	114

(8) P1a. Skriv ett Matlabprogram som bestämmer det polynom

$$P(x) = c_1 + c_2(x - 804) + c_3(x - 804)^2 + c_4(x - 804)^3$$

som interpolerar tabellvärdena. Programmet skall dessutom rita grafen för $y = P(x)$ på intervallet $800 \le x \le 807$ samt markera tabellvärdena med t. ex. ringar.

(7) P1b. Skriv ett Matlabprogram som bestämmer maximum för funktionen $P(x)$ på intervallet $801 \le x \le 806$. Om du inte löst a. får du anta att koefficienterna $c_1, \ldots, c_4$ är kända. Markera maxpunkten med t.ex. ett kryss på grafen i a.

(10) P2a. Givet differentialekvationsproblemet

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.1\frac{dy}{dt} + 7y - 2z = 0$$

$$2\frac{d^2z}{dt^2} + 0.2\frac{dz}{dt} + 7z - 2y = 3\sin(0.5t)$$

$$y(0) = 0.1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0.3, \quad z(0) = 0.2, \quad \frac{dz}{dt}(0) = 0.4$$

Skriv ett Matlabprogram som med Heuns metod (se ledningen nedan) med steglängden h beräknar och plottar $y(t)$ och $z(t)$ för $0 \le t \le 4\pi$. Slutvärdena $y(4\pi)$ och $z(4\pi)$ skall skrivas ut.

Skriv programmet så beräkningarna görs för steglängderna $h = \pi/30, \pi/60, \pi/120, \pi/240$ och en tabell av följande utseende genereras.

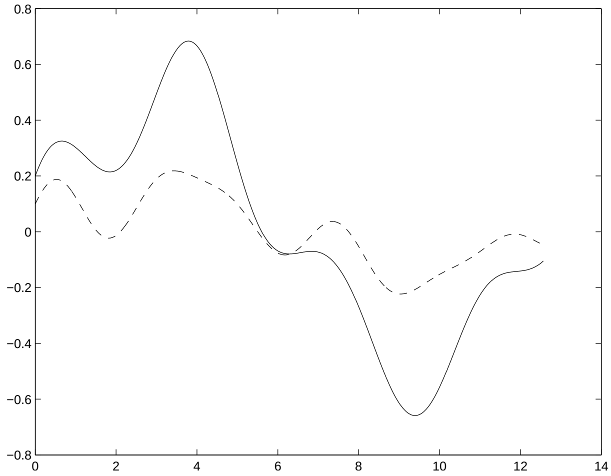
```
     h          t           y           z
  0.1047    12.5664    -0.0645    -0.1113
  0.0524    12.5664    -0.0512    -0.1063
  0.0262    12.5664    -0.0480    -0.1051
  0.0131    12.5664    -0.0472    -0.1048
```

Plotbilden skall ritas för den kortaste steglängden.

Ledning: Heuns metod skrivs

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_1 + f_2), \quad f_1 = f(t_i, y_i), f_2 = f(t_i + h, y_i + hf_1)$$

(3) P2b. Programmet i a. genererar följande plotbild.



Lösningskurvorna $y(t)$ och $z(t)$ skär varandra vid $t \approx 6$. Beskriv hur programmet i a. skall modifieras för noggrann bestämning av skärningspunkten. Fullständigt Matlabprogram krävs ej, endast en ideskiss.

(7) P2c. (kan lösas utan att a. och b. lösts) Kan du ur tabellen i P2a. bestämma noggrannhetsordningen för Heuns metod för detta problem? För full poäng måste dina utsagor motiveras.

Ledning: Det globala felet i en komponent av lösningen kan skrivas ch^p. Du skall bestämma värdet av p i detta uttryck.

(8) P3a. Givet problemet

$$\frac{d^2u}{dt^2} - tu = 0, \quad u(1) = 2, u(3) = 4$$

som skall lösas med finitadifferensmetod med intervallet $1 \leq t \leq 3$ delat i 4 lika delintervall. Formulera det linjära ekvationssystem

$$A\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

som ger den approximativa lösningen till problemet. Samtliga element i matrisen A skall anges, liksom komponenterna i vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{b}$.

(7) P3b. Problemet i P3a. ändras så randvillkoren är

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{vid} \quad t = 1 \quad \text{och} \quad u(3) = 4$$

Hur representeras det ändrade randvillkoret? Hur ändras det linjära ekvationssystemet? Samtliga element i koefficientmatrisen skall anges, liksom komponenterna i lösningsvektorn och högerledet.

Na,Matematik, Bengt Lindberg

Lösning

DN1212,DN1214, DN1240-41, DN1243, SF1516-19, SF1541, SF1543

OmTentamen i Numeriska metoder , Onsdag 2015-01-08, 9–12

(8) P1a.
```
x=[801;803;805;806]; y=[102;110;126;114];
m=804;
A=[ones(size(x)) x-m (x-m).^2 (x-m).^3];
c=A\y;
xp=[801:0.1:806]';
yp=c(1)+c(2)*(xp-m)+c(3)*(xp-m).^2+c(4)*(xp-m).^3;
plot(x,y,'o',xp,yp)
```

(7) P1b. Maximum erhålls för det x-värde som satisfierar $P'(x) = 0$.

$$P'(x) = c_2 + 2c_3(x - 804) + 3c_4(x - 804)^2 = 0$$

Detta är en andragradsekvation med lösningarna

$$x = 804 - \frac{c_3}{3c_4} \pm \sqrt{\frac{c_3^2}{9c_4^2} - \frac{c_2}{3c_4}}$$

Den ena lösningen ger maxpunktens läge.

```
p=c(3)/(3*c(4)); q=sqrt(p^2-c(2)/(3*c(4)));
x1=804-p-q; x2=804-p+q;
y1=c(1)+c(2)*(x1-m)+c(3)*(x1-m).^2+c(4)*(x1-m).^3;
y2=c(1)+c(2)*(x2-m)+c(3)*(x2-m).^2+c(4)*(x2-m).^3;
[x1 y1; x2 y2]  %
```

(10) P2a.
```
function f=fp2(t,y)
 f=[y(2)
    -7*y(1)-0.1*y(2)+2*y(3)
    y(4)
    1.5*sin(0.5*t)+y(1)-3.5*y(3)-0.1*y(4)];

---------------------------------------------------------------

y0=[0.1; 0.3; 0.2; 0.4];
h=pi/30;
format compact
for i=1:4
  t=0; y=y0; tslut= 4*pi -h/2;
  yp=y'; tp=t;
  while t < tslut,
```

```
    f1=fp2(t,y);
    f2=fp2(t+h,y+h*f1);
    y=y+h*(f1+f2)/2; yp=[yp;y'];
    t=t+h;           tp=[tp; t];
  end
  disp([h t y(1) y(3)])
  h=h/2;
end
plot(tp,yp(:,1),tp,yp(:,3))
```

(3) P2b. Villkorssatsen ändras till `while y(3) > y(1)` När villkoret ej längre är uppfyllt har de två kurvorna just skurit varandra. De två sista raderna i lösningstabellen används därefter för att definiera en rät linje i t för `y(3) - y(1)` , dvs för skillnaden mellan $z(t)$ och $y(t)$. Vi genomför således linjär interpolation till $z(t) - y(t)$. Då behövs funktionsvärden i de två punkterna. Dessa beräknas från värden på de sista två raderna i lösningstabellen. Den räta linjens skärning med t-axeln beräknas därefter analytiskt. Felet blir proportionellt mot steglängden i kvadrat.

(7) P2c. Jag använder y-vädena. Analysen kan även göras för z-värdena. Låt $y(h)$ beteckna den numeriska lösningen i slutpunkten, beräknad med vår metod med steglängden h, och y står för den exakta lösningen värde i samma punkt. Då gäller

$$y(h) = y + ch^p + ...$$

Med de tre steglängderna H, $2H$ och $4H$ insatta får vi

$$y(4H) = y + c(4H)^p + ...$$

$$y(2H) = y + c(2H)^p + ...$$

$$y(H) = y + c(H)^p + ...$$

Subrahera parvis så elimineras y och dividera därefter respektive led så får vi

$$\frac{y(4H) - y(2H)}{y(2H) - y(H)} = \frac{(4H)^p - (2H)^p}{(2H)^p - H^p} = 2^p$$

Med de tre sista tabellvrdena insatta blir kvoten

$$\frac{-0.0032}{-0.0008} = 4$$

Således är $p = 2$

(8) P3a. a.Inför beteckningen u_i för en approximation till $u(t_i)$. Låt $t_i = 1 + i \times h$ så kan vi skriva approximationsformeln

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - t_i u_i = 0$$

Om intervallet $(1, 3)$ delas in i fyra lika delar så blir steglängden $h = 2/4 = 0.5$, så diskretiseringsnätet blir $t_0 = 1, t_1 = 1.5, t_2 = 2, t_3 = 2.5, t_4 = 3$. Punkterna $t_1, \ldots t_3$ är de inre punkterna. Vi formulerar approximationerna i i de tre inre punkterna och får

$$
\begin{aligned}
t = t_1 &: \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} - 1.5u_1 = 0 \\
t = t_2 &: \frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} - 2u_2 = 0 \\
t = t_3 &: \frac{u_4 - 2u_3 + u_2}{h^2} - 2.5u_3 = 0
\end{aligned}
$$

Vi stuvar om i ekvationerna, förlänger med h^2 och använder $u_0 = 2, u_4 = 4$ så får vi

$$
\begin{pmatrix} -2 - h^2 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 - h^2 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 - h^2 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

(7) P3b. Den enklaste tentamenslösningen är att behålla diskretiseringsnätet som det är och representera derivatarandvillkoret med en framåtdifferens vilket ger

$$
u_1 = u_0
$$

. Om vi ersätter u_0 i ekvationen vid $t = t_1$ med u_1 så får vi följande ekvationssystem

$$
\begin{pmatrix} -1 - h^2 1.5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 - h^2 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 - h^2 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}
$$