KTH-Matematik,Na

**Namn:** ..............................................................................................................

**Personnr:** ..........................................................
**Program, Årskurs:**.................. **Bonuspoäng:**..................

## SF1518, SF1519, SF1541Facit: Tentamen i Numeriska metoder , Tisdag 14-10-28

**DEL 1** Inga hjälpmedel. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 14p E

(2p) **1.** Trapetsregeln för beräkning av en integral har noggrannhetsordning 2. Detta betyder att

a.

- [ ] Antalet korrekta decimaler kvadreras vid varje steglängsdshalvering
- [ ] Felet med steglängden h/2 är kvadraten av felet med steglängden h
- [x] Felet med steglängden h/2 är en fjärdedel av felet med steglängden h

b.

- [ ] Felet är proportionellt mot steglängden
- [x] Felet är proportionellt mot steglängden i kvadrat
- [ ] Felet är proportionellt mot steglängden i kubik

**2.** Differentialekvationsproblemet

$$(1+(\frac{dz}{dt})^2)\frac{d^2z}{dt^2} = 100z, \qquad z(0) = 1000, \quad \frac{dz}{dt}(0) = 0$$

(2p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer Då blir n. . .

- [ ] 1.
- [x] 2.
- [ ] 3.
- [ ] 4.
- [ ] 5.
- [ ] det är omöjligt att säga

(2p) **3.** En dator löser ett icke-glest linjärt ekvationssystem med 200 ekvationer och 200 obekanta på 0.1 sekunder. Hur lång tid tar det för samma dator att lösa ett system med 1000 ekvationer och obekanta?

- [ ] 0.5
- [ ] 2.5
- [ ] 5
- [x] 12.5
- [ ] 50
- [ ] 125
- [ ] 625
- [ ] 1250

(3p) **4.** Minstakvadratanpassning görs av ett andragradspolynom till givna mätdata $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ vid $x$-värdena $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Problemet leder till ett linjärt ekvationssystem $A\mathbf{z} \approx \mathbf{b}$. Vilka påståenden nedan är sanna? Residualvektorn betecknas med $\mathbf{r}$.

a.

- [ ] $\mathbf{r}$ har 2 komponenter
- [ ] $\mathbf{r}$ har 3 komponenter
- [ ] $\mathbf{r}$ har 4 komponenter
- [x] $\mathbf{r}$ har 5 komponenter

b.

- [ ] $A$ har 2 rader
- [ ] $A$ har 3 rader
- [ ] $A$ har 4 rader
- [x] $A$ har 5 rader

c.

- [ ] $A$ har 2 kolumner
- [x] $A$ har 3 kolumner
- [ ] $A$ har 4 kolumner
- [ ] $A$ har 5 kolumner

**5.** Givet en vektorvärd funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2/4 + xy - 4.01 \\ 2x^5y^2 + x - 1.1y^3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(2p) För att kunna använda Newtons metod på systemet $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0$ behöver vi beräkna Jakobianen till funktionen. Låt startgissningen till Newtons metod vara $x_0 = 1, y_0 = 2$. Värdet av elementet på andra raden, första kolumen av Jakobianen är

- [ ] 8
- [ ] 21
- [x] 41
- [ ] 101
- [ ] -5.9
- [ ] 0

(2p) **6.** Följande tabell är given.

| $x$ | 801 | 803 | 805 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 102 | 110 | 126 |

Ett interpolationspolynom $P(x)$ som går genom samtliga punkterna har andragradskoefficienten

- [ ] 801
- [ ] 102
- [ ] 4
- [x] 1
- [ ] 0
- [ ] 126

(2p) **7.** Givet följande approximationsformel

$$y'(a) \approx \frac{y(a) - y(a-h)}{h}$$

för derivatan av en funktion $y(x)$. Antag att $y(x)$ kan beräknas med fel som är högst $\frac{1}{2}10^{-8}$ för alla x-värden av intresse. Om steglängden $h = 10^{-4}$ används så blir felet i formeln pga fel i beräkning av $y(x)$ högst

- [ ] $\frac{1}{2}10^{-8}$
- [ ] $10^{-8}$
- [ ] $\frac{1}{2}10^{-6}$
- [ ] $10^{-6}$
- [ ] $\frac{1}{2}10^{-4}$
- [x] $10^{-4}$
- [ ] $\frac{1}{2}10^{-2}$
- [ ] $10^{-2}$

(3p) **8.** För att beräkna $\sqrt[4]{A}$ för givet värde på $A$ så formuleras ekvationen

$$x^4 - A = 0,$$

Newtons metod använd på denna ekvation kan skrivas

- [ ] $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{4}\frac{1}{x_n^3}$
- [x] $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{A}{4}\frac{1}{x_n^3}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n^3}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{A}{x_n^3}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2x_n}$
- [ ] $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{A}{2x_n}$

(2p) **9.** Integralen $\int_0^1 f(x)dx$ med

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^8 + x^4 + x + 10}}$$

skall beräknas. Svaret är ungefär

- [ ] 0.03
- [x] 0.3
- [ ] 3
- [ ] 30
- [ ] 100
- [ ] 300
- [ ] 1000

Na,Matematik, KTH

# SF1518, SF1519, SF1541 Facit: Tentamen Numeriska Metoder
## Tisdag 14-10-28

Hjälpmedel:
**Del 2**: 50 poäng.

**P1.** Inför beteckningen $y = (k, z)^T$ och skriv

$$F(y) = \begin{pmatrix} z^2k - k^3z - 2.02 \\ 2zk + z^3k^{-1} - 11.78 \end{pmatrix}$$

Jakobianen till $F$ blir

$$J = \begin{pmatrix} z^2 - 3k^2z & 2zk - k^3 \\ 2z - z^3k^{-2} & 2k + 3z^2k^{-1} \end{pmatrix}$$

Med startvärdet $z = 2, k = 1$ blir

$$F(y) = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.22 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}$$

Det linjära ekvationssystem blir

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ dz \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -0.02 \\ 0.22 \end{pmatrix}$$

Med Gausselimination får vi lösningen $dk = -0.0588, dz = -0.0325$ så nästa iterat i Newtons metod blir $k = 0.9412, z = 1.9675$ Ett matlabprogram skrivs

```
z=2; k=1;
d=1;
while norm(d,inf)>1.E-8
    F=[z*z*k-k*k*k*z-2.02
        2*z*k+z*z*z/k-11.78];
    J=[z*z-3*k*k*z  2*z*k-k*k*k
        2*z-z*z*z/(k*k)  2*k+3*z*z/k];
    d=-J\F;
    k=k+d(1); z=z+d(2);
    norm(d,inf)
end
k
z
```

**P2. P2a.** Inför variablerna $u_1 = x, u_2 = x', u_3 = y, u_4 = y'$ så får vi systemet

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -u_1/r3 \\ u_3' &= u_4 \\ u_4' &= -u_3/r3 \end{aligned}$$

med

$$r3 = (x^2+y^2)^{3/2}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1-E \\ 0 \\ 0 \\ (\frac{1+E}{1-E})^{1/2} \end{pmatrix}$$

Matlabfunktion

```
function f=fodep(t,u)
r3=(u(1)^2+u(3)^2)^(3/2);
f=[u(2);-u(1)/r3;u(4);-u(3)/r3];
```

beräknar högerledet i detta system.

**P2b,c**

```
%b
E=0.2;
u0=[1-E; 0; 0;  ((1+E)/(1-E))^(1/2)];
[T,U]=ode45(@fodep,[0 20],u0);
plot(U(:,1),U(:,3))
%c
i=1;
while T(i)<2
      i=i+1;
end
r=abs(sqrt( (U(i:end,1)-(1-E)).^2+U(i:end,3).^2) );
[l,index]=min(r)
period=T(index+i)
```

**P3.** **P3a.** Inför diskretiseringspunkterna $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6$ och approximativa värden $u_1 = 0.5, u_2 = z, u_3 = 0.33333....$ Vi har då endast en inre punkt $x_2 = 5$ och en okänd storhet $z$. Diskretiseringen av differentialekvationen ger då

$$\frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} - u_2^3 + u_2\frac{u_3 - u_1}{2h} = 0$$

d.v.s. med kända värden insatta får vi ekvationen för z

$$\frac{1/3 - 2z + 0.5}{1} - z^3 + z\frac{1/3 - 0.5}{2} = 0$$

**P3b.** Inför diskretiseringspunkterna $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$ och approximativa värden $z_0 = 0.5, z_1, z_2, z_3$. Vi har då två inre punkt er $x_1, x_2$ och tre okända storheter $z_1, z_2, z_3$. Diskretiseringen av differentialekvationen i $x_1, x_2$ ger då

$$\frac{z_2 - 2z_1 + 0.5}{h^2} - z_1^3 + z_1\frac{z_2 - 0.5}{2h} = 0$$

$$\frac{z_3 - 2z_2 + z_1}{h^2} - z_2^3 + z_2\frac{z_3 - z_1}{2h} = 0$$

En tredje ekvation får vi från randvillkoret på högra randen

$$z_2 + 3\frac{z_3 - z_1}{2h} = 0$$

Detta är våra tre ekvationer för de tre obekanta. Här är $h = 0.5$