KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**................. **Bonus:**...........

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Fredag 19/10 2012, kl 14-17

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange ovan dina giltiga bonuspoäng från ht-12, vt-12 eller ht-11, och den kursomgång (linje, termin, år) där poängen erhållits

(2p) **1.** Ekvationen $(2-x)^2 + 3\ln(x) - 0.5 = 0$ skall lösas med Newtons metod. Om startvärdet $x_0 = 1$ används vad blir nästa iterat x_1?

- ☐ 0.5
- ☐ 1.0
- ☐ 1.5
- ☐ 1.7
- ☐ 2.0
- ☐ något annat

(3p) **2.** Givet 20 par av mätvärden $(t_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 20$. Funktionen $y(t) = a + be^{-2t} + c/t$ skall anpassas till dessa mätvärden med minsta kvadratmetoden.

Vilken dimension får matrisen A i det överbestämda linjära ekvationssystemet $Ap = y, p = (a, b, c)^T$ (1.5p)

- ☐ 20×20
- ☐ 3×20
- ☐ 20×3
- ☐ 3×3
- ☐ någon annan

Vad gäller för minstakvadratlösningen p (1.5p)?

- ☐ euklidiska normen för p minimeras
- ☐ $A^T p$ ska bli noll
- ☐ euklidiska normen av $y - p$ minimeras
- ☐ euklidiska normen av $y - Ap$ minimeras
- ☐ $AA^T p = Ay$

(3p) **3.** Givet (x, y)-värdena $(-1, -1)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$.

Vilket polynom $p(x)$ interpolerar dessa värden? (1.5p)

- ☐ $p(x) = 1 + x - x^2$
- ☐ $p(x) = 1 - x - x^2$
- ☐ $p(x) = 1 + x + x^2$
- ☐ $p(x) = 1 + 2x$
- ☐ något annat

Vilken rät linje $y = a + bx$ minstakvadratanpassar dessa värden? (1.5p)

- ☐ $y = 1 + x/3$
- ☐ $y = 1 + 2x$
- ☐ $y = 1/3 + x$
- ☐ $y = 1/2 + x$
- ☐ någon annan

(3p) **4.** Givet differentialekvationen $y' = x - y - 1, \quad y(1) = a.$

Antag att begynnelsevärdet $a = 2$. Om Eulers metod med steget $h = 1$ används, vad blir då $y(2)$ approximativt? (1p)

- ☐ -1
- ☐ -0.5
- ☐ 0
- ☐ 1

Om Eulers metod med steget $h = 0.5$ används, för vilket begynnelsevärde a blir Eulerapproximationen av $y(2)$ lika med 0.5? (2p)

- ☐ $a = 0.5$
- ☐ $a = 0.8$
- ☐ $a = 1$

5. Trapetsvärdet $T(h)$ (där h är steglängden) för beräkning av en integral $I = \int_a^b f(x)dx$ har noggrannhetsordningen två. Detta innebär att

(2p)

- ☐ Integralen kan skrivas om som en andra ordningens differentialekvation
- ☐ Felet $T(h) - I$ är i stort sett proportionellt mot h^2.
- ☐ Resultatet av beräkningen blir ett polynom av andra graden.
- ☐ Felet avtar med en faktor 2 då steglängden halveras.

6. För att lösa ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$ med n obekanta med Gausselimination är tidsåtgången proportionell mot

(2p)

Om A är triangulär .... (1p)

- ☐ n^3
- ☐ n^2
- ☐ n
- ☐ oberoende av n

Om A är tridiagonal .....(1p)

- ☐ n^3
- ☐ n^2
- ☐ n
- ☐ oberoende av n

7. Givet följande ekvation, där vi vill beräkna roten $x = \alpha$.

$$\int_0^x e^{-t^2} dt + x^2 = 1$$

(2p) Vilka numeriska metoder är lämpligast att kombinera för att lösa problemet?

- ☐ Trapetsregeln och interpolation
- ☐ Eulers metod med extrapolation
- ☐ Trapetsregeln och Newton-Raphson
- ☐ Minstakvadratmetoden och Eulers metod
- ☐ Runge-Kuttas och trapetsregeln

8. Differentialekvationssystemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{dy}{dx})^2 + z^2 + x - 5, \quad \frac{dz}{dx} = -z + 2(\frac{dy}{dx})^2 - 1$$

(3p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (2p)

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ det är omöjligt att säga.

Om Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ det är omöjligt att säga.

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243
Fredag 19/10 2012, kl 14-17

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

(15p) **1.** Givet följande icke-linjära ekvationssystem:

$$e^{x-y} = 1.1 - y, \qquad 2e^{x+y} = 0.9 + x \tag{$*$}$$

a) (4p) Inför lämpliga beteckningar, ange jacobianen och formulera Newtons metod för detta ekvationssystem.

b) (4p) Givet startvärdena $x = 0, y = 0$. Formulera och lös det linjära ekvationssystem som bildas i den första iterationen.

c) (7p) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-program som löser ($*$) med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-6} i varje komponent av lösningen. Skriv ut en tabell som för varje iteration skriver en rad innehållande bägge komponenterna och deras korrektioner. Svara på frågan: Hur ser man i tabellen att konvergensen är kvadratisk?

(20p) **2.** Givet följande differentialekvationsproblem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\frac{dy}{dt})^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

a) (3p) Skriv om differentialekvationen som ett system på vektorform av första ordningen.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$$

Ange både högerledet $\mathbf{f}$ och begynnelsevärdet $\mathbf{u}_0$.

b) (12p) Vi vill beräkna den tidpunkt T då $y(T) = 0$.
Skissera en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-prgram, som med Eulers metod ger en lösningskurva (t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), ... fram till det t_i-värde, där $y_i < 0$ för första gången. Detta t_i-värde ger en grov approximation till T. Steglängden h väljs till $h = 0.001$. Lösningskurvan $y(t)$ erhållen med Eulers metod ska plottas.

c) (5p) Utöka algoritmen i b) så att tidpunkten T bestäms noggrannare med hjälp av linjärinterpolation genom att använda de två sista punkterna på lösningskurvan i b).

(15p) **3.** Givet randvärdesproblemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} + kx^2y + 1 = 0, \quad y(0) = 0, y(2) = 1$$

där k är en parameter.

a) (5p) Antag att $k = 1$. Inför lämpliga beteckningar, ställ upp en differensapproximation till problemet, välj en steglängd h och formulera det ekvationssystem som ger den numeriska lösningen. Ange speciellt sambandet mellan steglängden h och antalet ekvationer n. MATLAB-program krävs ej.

b) (10p) Vi vill nu beräkna det k-värde för vilket $y(1) = 2$. Diskutera lämpliga metoder som behövs för att lösa problemet. MATLAB- program krävs ej, men du ska komma fram till en algoritm som med ord och formler beskriver hur k erhålles och som kan översättas till ett MATLAB-program.

KTH-CSC **Namn:** ....

Personnr: .... **Program, årskurs:**.................. **Bonus:**............

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Fredag 19/10 2012, kl 14-17

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange ovan dina giltiga bonuspoäng från ht-12, vt-12 eller ht-11, och den kursomgång (linje, termin, år) där poängen erhållits

(2p) **1.** Ekvationen $(2-x)^2 + 3\ln(x) - 0.5 = 0$ skall lösas med Newtons metod. Om startvärdet $x_0 = 1$ används vad blir nästa iterat x_1?

☐ 0.5

(3p) **2.** Givet 20 par av mätvärden $(t_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, 20$. Funktionen $y(t) = a + be^{-2t} + c/t$ skall anpassas till dessa mätvärden med minsta kvadratmetoden.

Vilken dimension får matrisen A i det överbestämda linjära ekvationssystemet $Ap = y, p = (a, b, c)^T$ (1.5p)

☐ 20×3

Vad gäller för minstakvadratlösningen p (1.5p)?

☐ euklidiska normen av $y - Ap$ minimeras

(3p) **3.** Givet (x, y)-värdena $(-1, -1)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$.

Vilket polynom $p(x)$ interpolerar dessa värden? (1.5p)

☐ $p(x) = 1 + x - x^2$

Vilken rät linje $y = a + bx$ minstakvadratanpassar dessa värden? (1.5p)

☐ $y = 1/3 + x$

(3p) **4.** Givet differentialekvationen $y' = x - y - 1, \qquad y(1) = a.$

Antag att begynnelsevärdet $a = 2$. Om Eulers metod med steget $h = 1$ används, vad blir då $y(2)$ approximativt? (1p)

☐ 0

Om Eulers metod med steget $h = 0.5$ används, för vilket begynnelsevärde a blir Eulerapproximationen av $y(2)$ lika med 0.5? (2p)

☐ $a = 1$

(2p) **5.** Trapetsvärdet $T(h)$ (där h är steglängden) för beräkning av en integral $I = \int_a^b f(x)dx$ har noggrannhetsordningen två. Detta innebär att

☐ Felet $T(h) - I$ är i stort sett proportionellt mot h^2.

(2p) **6.** För att lösa ett linjärt ekvationssystem $Ax = b$ med n obekanta med Gausselimination är tidsåtgången proportionell mot

Om A är triangulär .... (1p)

☐ n^2

Om A är tridiagonal .....(1p)

☐ n

7. Givet följande ekvation, där vi vill beräkna roten $x = \alpha$.

$$\int_0^x e^{-t^2} dt + x^2 = 1$$

(2p) Vilka numeriska metoder är lämpligast att kombinera för att lösa problemet?

☐ Trapetsregeln och Newton-Raphson

8. Differentialekvationssystemet

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{dy}{dx})^2 + z^2 + x - 5, \quad \frac{dz}{dx} = -z + 2(\frac{dy}{dx})^2 - 1$$

(3p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (2p)

☐ 3

Om Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

☐ 3

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212,DN1214,DN1215, DN1240,DN1241,DN1243
Fredag 19/10 2012, kl 14-17

DEL 2 Lösningar

1. Ekvationslösning

a. Inför vänsterledsvektorn **f** där $f_1(x,y) = e^{x-y} + y - 1.1, \quad f_2(x,y) = 2e^{x+y} - x - 0.9$. Då erhålles jacobianen $J(x,y)$:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y} & 1 - e^{x-y} \\ -1 + 2e^{x+y} & 2e^{x+y} \end{pmatrix}$$

Låt vidare $\mathbf{u} = (x,y)^T$. Då blir Newtons metod

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - J^{-1}(\mathbf{u}_k)\mathbf{f}(\mathbf{u})_\mathbf{k}$$

b. Insättning av $x = 0$ och $y = 0$ i jacobianen och högerledet ovan ger

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

Ekvationssystemet som ska lösas är $J(0,0)\delta\mathbf{u} = -\mathbf{f}(0,0)$ vilket ger $\delta\mathbf{u} = (0.1, -0.6)^T$

c. MATLAB-program

```
u=[0,0]';delta=[1,1]';
tabell=[u' delta'];
format short e
while abs(delta)>1e-6
f=[exp(u(1)-u(2))+u(2)-1.1;2*exp(u(1)+u(2))-u(1)-0.9];
J=[exp(u(1)-u(2)),1-exp(u(1)-u(2));-1+2*exp(u(1)+u(2)),2*exp(u(1)+u(2))];
delta=-J;u=u+delta;
tabell=[tabell;[u',delta']];
end
tabell
```

2. Begynnelsevärdesproblem

a. Låt $u_1 = y, \quad u_2 = dy/dt$. Systemet blir $du_1/dt = u_2, \quad u_1(0) = 1, \qquad du_2/dt = -u_1^2 - 1, \quad u_2(0) = 0$.

b. MATLAB-program

```
u=[1,0]';t=0;h=1e-3;
uout=[u'];tout=[t];
while u(1)>0
u=u+h*[u(2);-u(1)^2 - 1];
t = t + h;
uout = [uout; u'];
tout = [tout; t];
end
T = t;
plot(tout,uout(:,1))
```

c. Ekvationen för den räta linjen $y(t)$ mellan (t_{n-1}, y_{n-1}) och (t_n, y_n) är $y(t) - y_n = k(t - t_n)$, där $k = (y_n - y_{n-1})/h$. Detta ger $T = t_n - k/y_n$. I stället för satsen T=t för in följande satser
n=length(tout);
T=t-u(n,1)/((u(n,1)-u(n-1,1)/h))

3. Randvärdesproblem

a. Vi använder FDM (Finita DifferensMetoden). Definiera först ett grid: $x_0 = 0, x_1 = h, ...x_{n+1} = (n+1)h = 2$. Ställ upp en differensapproximation:

$$x = x_i : \qquad \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i^2 y_i + 1 = 0, \quad y_0 = 0, y_{n+1} = 1$$

Ekvationssystemet blir $Ay = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} -2 + h^2 x_1^2 & 1 & 0 & 0.....0 \\ 1 & -2 + h^2 x_2^2 & 1 & 0.....0 \\ .... & & & \\ 0.....0 & 0 & 1 & -2 + h^2 x_n^2 \end{pmatrix} \qquad b = h^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ . \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ , \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. Finita differensmetoden kombineras med sekantmetoden.
0. Låt K1=0, ”fejkat” värde för k.
1. Välj först en steglängd h.
2. Välj två startvärden för k: k1 och k2.
3. Lös randvärdesproblemet för k1 och k2. Detta ger två approximativa värden för y(1): y11 och y12.
4. Beräkna med sekantmetoden nästa k-värde: k3
5. Byt: k1=k2, k2=k3, y11=y12.
6. Beräkna approximativt värde för y(1) för (nya) k2: ger (nytt) y12
7. Om abs(k2-k1)>1e-6 gå till 4.
8. Låt K2=k2, den approximation som sekanttoleransen 1e-6 ger.
9. Om abs(K2-K1)>1e-4, låt h=h/2, K1=K2, gå till 1.
10. Tag K2 som slutlig approximation till k.