DN12, 14, 15, 40, 41, 43 mfl

Tisdag 2013-01-08, kl 10-13
Tentamen i grundkurs i numeriska metoder

Del 1 (av 2)

Skrivtid 3 tim.**Inga hjälpmedel.** Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Maximal poäng 20 + bonuspoäng (max 4p).

(0p) 0. Ange dina bonuspoäng (bara VT12 och HT12 gäller), kursomgång och program: ....

(2p) 1. Vad får man för värde om man i tabellen skattar $y(6)$ med ...

x	3	4	5	7
y	2	3	6	9

... linjär interpolation (0.5p)?

- ☐ 7.5
- ☐ 7.75
- ☐ 8.0
- ☐ 8.5

... kvadratisk interpolation (1.5p)?

- ☐ 7.5
- ☐ 7.75
- ☐ 8.0
- ☐ 8.5

(1p) 2. Vilken typ av konvergens mot ett enkelt nollställe bör Newtons metod för lösning av $f(x) = 0$ ha, om f har minst två kontinuerliga derivator för alla x?

- ☐ Ingen
- ☐ Oregelbunden
- ☐ Linjär
- ☐ Superlinjär
- ☐ Kvadratisk
- ☐ Kubisk

(2p) 3. Ekvationen $x^3 = 7x + 2$ har en rot nära $x = 2$. Vad blir nästa iterat med Newtons metod med detta startvärde?

- ☐ 2.2
- ☐ 2.6
- ☐ 2.8
- ☐ 3.0
- ☐ 3.2
- ☐ 3.6

(2p) 4. Polynomet $x^2 - 2x + 3$ interpolerar de tre första punkterna i tabellen. Tredjegradspolynomet $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ interpolerar alla fyra.

x	0	1	3	4
y	3.0	2.0	6.0	14.0

Vad blir

... a_0? (0.5p)

- ☐ 1/4
- ☐ 1/2
- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ något annat

...a_3? (1.5p)

- ☐ 1/4
- ☐ 1/2
- ☐ 1
- ☐ 3
- ☐ något annat

(2p) 5. Vilket värde får man om man skattar integralen $\int_1^2 2x^2 dx$ med trapetsregeln och ...

... steglängden 1 (1p)?

- [ ] $4\frac{1}{2}$
- [ ] $4\frac{2}{3}$
- [ ] $4\frac{3}{4}$
- [ ] $4\frac{4}{5}$
- [ ] $4\frac{5}{6}$
- [ ] 5

... steglängden 0.5 (1p)?

- [ ] $4\frac{1}{2}$
- [ ] $4\frac{2}{3}$
- [ ] $4\frac{3}{4}$
- [ ] $4\frac{4}{5}$
- [ ] $4\frac{5}{6}$
- [ ] 5

(1p) 6. Man har gjort två beräkningar av $f'(x)$ med $D(H) = (f(x+H) - f(x))/H$ med steglängderna $H = h$ och $H = 2h$. Hur bör man kombinera dessa för att erhålla en normalt bättre approximation?

- [ ] $D(h) + (D(h) - D(2h))/3$
- [ ] $D(2h) + (D(2h) - D(h))/3$
- [ ] $D(h) + (D(h) - D(2h))$
- [ ] $D(2h) + (D(2h) - D(h))$
- [ ] $D(h) - (D(h) - D(2h))/3$
- [ ] $D(2h) - (D(2h) - D(h))/3$

(2p) 7. Givet begynnelsevärdesproblemet $y''\,x + y'\,x^2 = 2$, $y(2) = 4$ och $y'(2) = 1$ Vad blir med Eulers metod och steget 0.5 ...

... värdet på $y(2.5)$ (0.5p)?

- [ ] 5
- [ ] $4\frac{5}{6}$
- [ ] $4\frac{4}{5}$
- [ ] $4\frac{3}{4}$
- [ ] $4\frac{2}{3}$
- [ ] $4\frac{1}{2}$

... värdet på $y(3)$ (1.5p)?

- [ ] 5
- [ ] $4\frac{5}{6}$
- [ ] $4\frac{4}{5}$
- [ ] $4\frac{3}{4}$
- [ ] $4\frac{2}{3}$
- [ ] $4\frac{1}{2}$

(2p) 8. Runge-Kuttas klassiska metod för initialvärdesproblem har noggrannhetsordning fyra. Med steglängd 0.1 blev lösningen 12.3456 och med steglängd 0.01 blev det 12.3501. Vi antar att steglängderna är små.

... den bästa skattningen blir (1p)

- [ ] 12.3501
- [ ] 12.3504
- [ ] 12.3459
- [ ] något annat

... med steglängd 0.2 får man (1p)

- [ ] 12.2736
- [ ] 12.3411
- [ ] 12.2781
- [ ] något annat

(1p) 9. Lösning av ett linjärt ekvationssystem med 1236 obekanta tog tiden T på datorn. Hur lång tid tar det med 2501 obekanta, om koefficientmatriserna i båda fallen är

... helt fyllda ? (1p)

- [ ] T
- [ ] 2T
- [ ] 4T
- [ ] 8T
- [ ] 16T

... undertriangulära? (1p)

- [ ] T
- [ ] 2T
- [ ] 4T
- [ ] 8T
- [ ] 16T

(2p) 10. En metod med två parametrar $f(x, y)$ ger följande värden vid anrop:

$$f(1.00, 2.00) = 8.0,\ f(1.02, 2.00) = 8.4$$
$$f(1.00, 1.98) = 7.8,\ f(1.02, 1.98) = 8.2$$

Skatta den bästa gränsen för osäkerheten i $f(x, y)$-värdet då $x = 1.00 \pm 0.01$ och $y = 2.00 \pm 0.03$

- [ ] 0.04
- [ ] 0.05
- [ ] 0.07
- [ ] 0.50
- [ ] 0.70
- [ ] 1.00
- [ ] 1.20
- [ ] 1.60

(2p) 11. Polynomet $x^3 - 4x + 2.95 = 0$ har en rot nära 1. Vilken iterationsformel är snabbast för att hitta den?

- [ ] $x_{n+1} = (x_n^3 + 2.95)/4$
- [ ] $x_{n+1} = 3(-2x_n/3 + (x_n^3 + 2.95)/4)$
- [ ] $x_{n+1} = x_n/2 + (x_n^3 + 2.95)/8$
- [ ] $x_{n+1} = x_n - (x_n^3 - 4x_n + 2.95)$

(1p) 12. Man har anpassat en kurva med tre parametrar med minstakvadratmetoden till 20 mätpunkter. Hur många ekvationer får normalekvationerna om man anpassar till 40 mätpunkter istället?

- [ ] Hälften så många
- [ ] Dubbelt så många
- [ ] Lika många
- [ ] Fyra gånger så många

Tentan fortsätter med del 2.

DN12, 14, 15, 40, 41, 43 mfl
Tentamen i grundkurs i numeriska metoder
Del 2 (av 2)
Tisdag 2013-01-08, kl 10-13, inga hjälpmedel

Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgräns (inkl bonuspoäng): 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximal poäng 50 + bonuspoäng (max 4p).
Miniräknare är **ej** tillåten på denna tentamen. Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag. Då algoritmbeskrivning begärs, avses om inte annat anges beskrivning i Matlab. Eftersom miniräknare ej är tillåten är det tillåtet att lämna enkla beräkningsuttryck oförenklade, tex
$c = 0.5 \cdot 0.2^3 \cdot \cos(\pi/3)$ i stället för det uträknade $c = 0.002$

———000———

(0p) P0. Ange dina bonuspoäng och den kursomgång (linje och termin: VT12 eller HT12) där poängen erhållits.

(17p) P1. Tomtemors julskinkesimulator
Den tidsberoende temperaturen i ytan kallas $T_y(t)$ och i mitten $T_m(t)$ och den konstanta ugnstemperaturen är $T_{ugn} = 125C$. Om tiden är t, och initialtemperaturen $T_0 = 20C$ så gäller enligt Tomtemor differentialekvationen (*):

$$\begin{aligned} dT_y/dt &= \alpha(T_{ugn} - T_y) + (T_m - T_y), \quad & T_y(0) = T_0 \\ dT_m/dt &= (T_y - T_m), & T_m(0) = T_0 \end{aligned}$$

där parametern α för aktuell skinka och ugn blir 1.3 per timme. Uppgiften är att skriva ett MATLAB-program som 1) beräknar tiden t_{ut} när skinkans mitt uppnår temperaturen $T_{ut} = 72C$ och 2) plottar båda temperaturerna i $[0, t_{ut}]$.
a)(5p) Skriv en MATLAB-function `function dTdt = ham(T)` som beräknar tidsderivatorna enligt (*). Värdena för T_{ugn} och α tas som ovan.
b)(8p) Skriv ett MATLAB-program som med `ham` löser initialvärdesproblemet med Heuns Runge-Kutta-metod som definieras för $dy/dt = f(y)$ för steget från y_i till y_{i+1} med steglängd h av

$$k = hf(y_i); y_{i+1} = y_i + hf(y_i + k/2); t_{i+1} = t_i + h$$

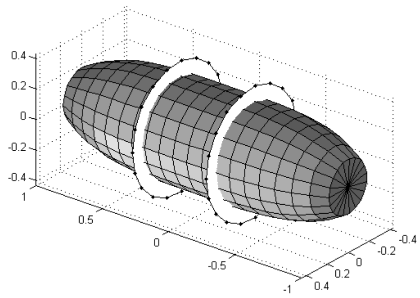
Du får använda funktionen `ham` även om du inte gjort a). Stegningen avbryts när vid $i = n$, T_m första gången överstiger T_{ut}. t_{ut} skall sedan beräknas med linjär interpolation i tabellen över y_i
c)(2p) Beskriv med användning av de definierade storheterna ovan hur du uppskattar felet i det beräknade t_{ut}
d)(2p) Beskriv, med användning av lämplig notation, hur du bestämmer den osäkerhet i beräknat värde t_{ut} som följer av att α-värdet bara är känt med 10% relativt fel.

(17p) P2. Skinka och kurvanpassning
Man mäter vid tidpunkterna $t_i, i = 1, 2, ..., n$ skink-innertemperaturerna T_i, se tabell nedan. Ugnstemperaturen är konstant $T_{ugn} = 125C$. Skinkan ska ut när dess temperatur blir $T_{ut} = 72C$ och det blir vid tiden t_{ut}. Tre nissar använder olika algoritmer för bestämning av t_{ut}:
Nisse1 anser att $T(t)$ är ett förstagradspolynom $p(t)$ med $p(t_k) = T_k, k = n-1, n$;

Vänd!

Nisse2 tror att $T(t)$ är förstagradspolynomet $q(t)$ som minstakvadratanpassats till alla data $(t_i, T_i), i = 1, 2, ..., n$.
Nisse3 å sin sida tror att Tomtemors modell skulle ge $T(t) = T_{ugn} - c_1\ e^{-c_2 t}$. Hen bestämmer genom listig omskrivning parametrarna c_1, c_2 som lösningar till ett *linjärt* minstakvadratproblem där alla data används.
a)(5p) Vad får Nisse1 för värde på t_{ut}?
b)(7p) Vad får Nisse2 för värde på t_{ut}? Tips: räkna tiden i 20-minutersenheter från kl. 18:00!
c)(5p) Gör Nisse3's omskrivning och ställ upp det linjära överbestämda system $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$ som hen får. Ange matrisen $\mathbf{A}$ och högerledet $\mathbf{b}$.

$t, kl.$	$17:20$	$17:40$	$18:20$	$18:40$
T, C	30	42	58	65



Figur 1: Degrullen med snitt

(16p) P3. Julbak, kvadratur och ekvationslösning

En degrulle ska delas i tre delar med samma volym med två snitt $v, h; v < h$ vinkelrätta mot $x-$axeln. Rullen uppstår när kurvan

$$y(x) = \frac{1}{3}\cos(x^2), -1 < x < 1$$

roteras runt $x-$axeln. Volymen av ett avsnitt (a, b) blir då $V(a, b) = \pi \int_a^b y^2(x)dx$.

a)(2p) Motivera ekvationen $f(v) = 3V(-1, v) - V(-1, 1) = 0$ och varför $v = -h$.
b)(2p) Ange $\frac{df}{dv}$
c)(7p) Skriv ett MATLAB-program som bestämmer v. Du får använda (utan att skriva den) `function intval = quad(f,a,b,tol)` som beräknar en approximation `intval` till $\int_a^b f(x)dx$ med fel $<$ tol. `f` är en funktion som evaluerar integranden. Den ska Du ska skriva och använda på rätt sätt. Programmet ska rita en figur med konturen $y(x)$ till degrullen och linjer som visar var v och h är. Du får välja ekvationslösningsmetod fritt och ska skriva den i MATLAB. (*inte* MATLABs `fzero` !) Den ger successiva värden $v_k, k = 0, 1, 2, ...$ Välj startvärde v_0 och motivera valet. Välj värden på tol och ϵ och stoppa iterationen vid v_n när $|v_n - v_{n-1}| < \epsilon$.
d)(5p) Ange en övre gräns för felet i v_n som ett uttryck som beror på tol, ϵ, och den ekvations-lösningsmetod du valt.

Lycka till!

P1

a)

```
function dTdt = ham(T)
a = 1.3; Tugn = 125;
dTdt = [a*(Tugn-T(1))+(T(2)-T(1));T(1)-T(2)];
```

b)

```
T0 = 20; Tut = 72; h = 0.1;
T = [T0; T0]; t = 0;
Tout = T'; tout = t;
while T(2) < Tut
    k = h*ham(T); T = T + h*ham(T+k/2); t = t+h;
    Tout = [Tout;T']; tout = [tout;t ];
end
% compute tut
tut = tout(end-1) +. . .
 h/(Tout(end,2)-Tout(end-1,2))*(Tut-Tout(end-1,2));
% plot
plot(tout,Tout(:,1),'og',tout,Tout(:,2),'+m');
plot([tut tut],[0 Tout(end,2)],'r')
```

c) Felen från Heuns metod och linjär interpolation blir båda $O(h^2)$. Men det blir också olika tider som slingan slutar så felet i `tut` blir inte säkert $O(h^2)$ och extrapolation kommer inte säkert att fungera. Alltså får man, precis som med ode45, beräkna tut(h) för en uppsättning h-värden, t ex

$$tut(h), tut(h/2), tut(h/4),\ldots, tut(h/2^n)$$

se hur det konvergerar och uppskatta felet i $tut(h/2^n)$ med $abs(tut(h/2^n) - tut(h/2^{n-1}))$

d) tut beror på h och α. Välj steglängd h* efter experimenten i c) och beräkna sedan

$$t1 = tut(h^*, 1.1\alpha) \text{ och } t2 = tut(h^*,0.9\alpha).$$

Svaret blir då

$$tut = (t1+t2)/2 \text{ plus minus } (abs(t1-t2)/2)$$

P2

a) Nisse1 får

$$T(t) = T_n + (T_n-T_{n-1})/(t_n-t_{n-1})\,(t-t_n)$$

och således

$$tut = t_n + (Tut - T_n)\,(t_n-t_{n-1})/\,(T_n-T_{n-1}) = 18{:}40 + (72-65)(1/3)/(65-58)*20 \text{ (min)} = 19{:}00$$

b) Nisse2 får (tm = 18:00)

$$T(t) = a + b\,(t - tm) \quad \text{och } tut = tm + (Tut - a)/b$$

där

t-tm:	-2	-1	1	2
T	30	42	58	65

med normalekvationer

$$4\,a + 0\,b = 195 : a = 195/4;\ 0\,a + 10\,b = 86: b = 8.6$$

och tut = 18:00 + (72 – 48 3/4)/8.6*20 (min) =…= 18:00 + 2.7*20 =18:54

c) Nisse3 får, med samma tideräkning som Nisse2,

$$c_1 e^{-c_2 t_i} = T_{ugn} - T_i;$$
$$a + bt_i = \ln(T_{ugn} - T_i)$$
$$a = \ln c_1, b = -c_2$$

Samma koefficientmatriser som Nisse2 men annat högerled:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \ln 95 \\ \ln 83 \\ \ln 67 \\ \ln 60 \end{pmatrix}$$

P3

a) Vänstra delen har volym $V(-1, v)$ och hela rullen $V(-1,1)$. $y(x) = y(-x)$ varför snittet h till höger om x = 0 blir = -v.

b) $\dfrac{df}{dv} = 3\dfrac{dV}{dv} = 3\pi y^2(v)$

c)

```
tol = 1e-6; epsil = 1e-6;
y = @(x) 1/3*cos(x.^2);              % Kontur
S = @(x) pi*y(x).^2;                 % Tvärsnittsyta
VV = quad(S,-1,1,tol);               % volym av hela rullen
f  = @(v) 3*quad(S,-1,v,tol)-VV;     %
df = @(v) 3*S(v);                    % derivata df/dv
% Newton
v = -0.3; dv = 2*epsil;
while abs(dv) > epsil
    dv = f(v)/df(v);v = v - dv;
    disp(v);
end
xpl = linspace(-1,1,100); plot(xpl,y(xpl)); hold on; axis equal;
plot([ v  v],[0 1],'r');plot([-v -v],[0 1],'g')
```

d) Beroende på vald metod får man en feluppskattning $E_v(\varepsilon)$ vid lösning av en ekvation; Newton eller sekant-metoden ger t ex $E_v(\varepsilon) < |v_n - v_{n-1}| < \varepsilon$, pessimistisk, och Newton, mera realistisk om följden $\{v_n\}$ är "regelbunden"

$$E_v(\varepsilon) < K\,|v_n - v_{n-1}|^2 < \varepsilon \text{ där } K = |v_n - v_{n-1}| / |v_{n-1} - v_{n-2}|^2$$

Men vi har löst fel ekvation, nämligen $F(v) = f(v) + g(v) = 0$ där $|g| < 3$ tol. Det därav följande felet uppskattas med

$$|g(v)/F'(v)| \text{ ung.} = |g(v)/f'(v)|$$

så totalt:

Felet < $E_v(\varepsilon)$ + tol/($\pi\, y^2(v)$)