

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Onsdag 17/3 2010, kl 14-17

DEL 1 Inga hjälpmedel. Betygsgräns (inkl bonuspoäng) för betyg E: 14p. Ange dina giltiga bonuspoäng från vt-09 (senare hälften) ht-09 eller vt-10, och den kursomgång (linje, termin) där poängen erhållits

- (2p) 1. Ekvationen $(2 - x)^2 + \ln(x) - 1.1 = 0$ skall lösas med Newtons metod. Om startvärdet $x_0 = 1$ används vad blir nästa iterat x_1 ?

- 0
 0.9
 1.0
 1.1
 något annat

- (3p) 2. Givet differentialekvationen $y' = x - y^2, y(1) = 1$ Antag att vi vill beräkna approximationer till $y(1.1)$ och $y(1.2)$ genom att använda Eulers metod med steget $h = 0.1$.

Vad blir Eulerapproximationen till $y(1.1)$?
 (1.5p)

- 0.9
 1.0
 1.02
 1.1
 något annat

Samma fråga för $y(1.2)$? (1.5p)

- 1
 1.01
 1.02
 1.9
 något annat

- (2p) 3. Givet (x, y) -värdena $(0, 1)$, $(1, 1)$ och $(2, 0)$. Vilket av nedanstående polynom interpolerar dessa värden?

- $y = -x + 2$
 $y = 1 + x/2 - x^2/2$
 $y = -x/2 + 1$
 $y = 1 - x/2 + x^2/2$

- (3p) 4. Givet en ekvation $f(x) = 0$, där roten $\alpha \approx 1$. Newtons metod $x_{n+1} = x_n - \delta x_n$, där $\delta x_n = f(x_n)/f'(x_n)$ används.

Vilka storheter går mot noll då metoden konvergerar mot roten α ? (1.5p)

- δx_n och $f(x_n)$
 δx_n och x_n
 x_n och $f'(x_n)$
 x_n och $f(x_n)$

Vad innebär kvadratisk konvergens? (1.5p)

- $\delta x_{n+1} \approx C \cdot \delta x_n$
 $\delta x_{n+1} \approx C \cdot (x_n)^2$
 $\delta x_{n+1} \approx C \cdot (\delta x_n)^2$
 $(\delta x_{n+1})^2 \approx C \cdot \delta x_n$

- (2p) 5. Trapetsvärdet $T(h)$ (där h är steglängden) för beräkning av en integral $I = \int_a^b f(x)dx$ har noggrannhetsordningen två. Detta innebär

- Integralen kan skrivas om som en andra ordningens differentialekvation
- Felet $\epsilon(h) = T(h) - I$ är i stort sett proportionellt mot h^2 .
- Felet avtar enligt $\epsilon(h/2) = C(\epsilon(h))^2$.
- Resultatet av beräkningen blir ett polynom av andra graden.
- Felet avtar med en faktor 2 då steglängden halveras.

- (3p) 6. En rät linje $y = kx + m$ ska anpassas till (x, y) -punkterna $(-1, 1)$, $(0, 0)$ och $(1, 2)$ i minsta kvadratmetodens mening.

Vad blir k och m ? (2p)

- $k = 0.5, m = 1$
- $k = 0.5, m = 0$
- $k = 1, m = 0.5$
- $k = 0, m = 0.5$
- $k = 1, m = 1$

Vad blir residualvektorn? (1p)

- $(0.5, -1, 0.5)^T$
- $(1, 0, -1)^T$
- $(1, -1)^T$
- $(1.5, -0.5, 0.5)^T$
- $(0, 0, 0)^T$

- (2p) 7. Man vill lösa ett randvärdesproblem $u''(x) = f(x), u(0) = 1, u(1) = 0, 0 \leq x \leq 1$ genom att använda FDM (finita differensmetoden) med centraldifferens och steget $h = 0.1$. Om randvillkoren sätts in i de ekvationer som erhålles då FDM tillämpas erhålles ett linjärt ekvationssystem $Au = b$.

Vilken dimension har matrisen A ?

- 12×12
- 10×9
- 9×9
- 8×8

Vilken struktur har matrisen A ?

- diagonal
- tridiagonal
- triangulär
- fylld

8. Differentialekvationssystemet

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + z^2 + x - 5, \quad \frac{dz}{dx} = -z + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1$$

- (3p) skrivs om som ett system av n st första ordningens differentialekvationer.

n blir .. (2p)

- 2
- 3
- 4
- 5
- det är omöjligt att säga.

Om Eulers eller Runge-Kuttas metod används, hur många begynnelsevärden krävs? (1p)

- 2
- 3
- 4
- 5
- det är omöjligt att säga.

Tentamen i Numeriska metoder för DN1212, DN1214, DN1215, DN1240, DN1241, DN1243
Onsdag 17/3 2010, kl 14-17

DEL 2 Inga hjälpmedel. Rättas endast om del 1 är godkänd. Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

- (15p) 1. Givet följande icke-linjära ekvationssystem:

$$x^3 + 10x = y + 5, \quad x + y^3 = 10y - 1 \quad (*)$$

- a) (3p) Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för ekvationssystemet.
- b) (4p) Motivera varför $x = 0.5, y = 0.15$ är en bra startgissning.
- c) (4p) Formulera det linjära ekvationssystem som skall lösas i den första iterationen.
- d) (4p) Skissera därefter en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-program som löser (*) med Newtons metod, och med fel mindre än 10^{-6} i varje komponent av lösningen. För varje iteration ska bägge komponenterna och deras korrekitioner skrivas ut.

- (20p) 2. Givet följande differentialekvationsproblem

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - C \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Parametrarna m , g och C har alla positiva värden.

- a) (3p) Skriv om differentialekvationen som ett system på vektorform av första ordningen.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

- b) (12p) Antag att vi har begynnelsevärden $y(0) = 1$ och $\frac{dy}{dt}(0) = 1$. Vi vill beräkna den tidpunkt T då $y(T) = 0$.
Skissera en algoritm, gärna i form av ett MATLAB-program, som med Eulers metod ger en lösningskurva $(t_0, y_0), (t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots$ fram till det t_i -värde, där $y_i < 0$ för första gången. Detta t_i -värde ger en grov approximation till T . Som siffervärden på parametrarna används: $m = 1$, $g = 9.81$, och $C = 0.03$. Steglängden h väljs till $h = 0.01$. Lösningskurvan ska plottas.
- c) (5p) Utöka algoritmen i b) så att tidpunkten T bestäms noggrannare med hjälp av linjärinterpolation genom att använda de två sista punkterna på lösningskurvan i b).

- (15p) 3. Betrakta sambandet

$$\int_0^1 \frac{e^{-kx^2}}{1+x^2} dx = 0.75$$

Strukturera en algoritm för numerisk beräkning av parametern k . Vilka delproblem behöver lösas och vilka numeriska metoder är lämpliga? Inför lämpliga beteckningar och formulera en algoritm. Programkod behövs EJ! Diskutera hur trunckeringsfelen i metoderna bidrar till en felgräns för det som söks.