



KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri  
Tentamen  
Tisdagen den 20 maj, 2014**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

---

**DEL A**

1. Planet  $P$  innehåller punkterna  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 3, 1)$  och  $(2, 2, 2)$ .
- (a) Bestäm en ekvation, på formen  $ax + by + cz + d = 0$ , för planet  $P$ . **(2 p)**
- (b) Bestäm en ekvation för det plan som är ortogonalt mot  $P$  och som innehåller linjen  $(x, y, z) = (t + 1, 2t, 1 - t)$ . **(2 p)**

2. För varje givet tal  $a$  har vi följande ekvationssystem i tre okända  $x, y$  och  $z$ :

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z & = 3 \\ -2x + 7y + 2z & = 1 \\ 2x + y + (a^2 - 1)z & = 1 \end{cases}$$

- (a) Avgör om  $(1, 1, 1)$  är med i lösningsmängden när  $a = 0$ . **(1 p)**
- (b) Bestäm lösningsmängden när  $a = 2$ . **(1 p)**
- (c) Bestäm för vilka värden på  $a$  som ekvationssystemet har en unik lösning, saknar lösning, respektive har oändligt många lösningar. **(2 p)**
3. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

och beräkna sedan  $A^{17}$ . **(4 p)**

---

## DEL B

4. I  $\mathbb{R}^4$  har vi följande vektorer

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_5 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Delrummet  $V = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$  har dimension tre.

- (a) Bestäm en bas för  $V$ . **(1 p)**  
 (b) Avgör om  $V^\perp = \text{Span}\{\vec{u}_5\}$ . **(2 p)**  
 (c) Skriv  $V$  som lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem. **(1 p)**

5. Vid en laboration får två studenter följande mätvärden

$t$ (ms)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$ (mm)	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3

Mätutrustningen är inte speciellt tillförlitlig och för att få ut det mest av mätningarna bestämmer sig studenterna för att använda minsta kvadratmetoden för att få reda på vilket linjärt samband  $x = at + b$  som bäst passar de gjorda mätningarna. Den ena studenten hävdar att man skulle tjäna på att göra en substitution som leder till att man istället skriver sambandet som  $x = a(t - 5 \text{ ms}) + b$ .

- (a) Utför de räkningar som behövs för att bestämma det linjära sambandet, antingen med eller utan substitutionen. **(3 p)**  
 (b) Förklara varför det ena sättet leder till en lättare beräkning. **(1 p)**

6. Låt  $L$  vara en linje genom origo i planet. Låt  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildning som speglar planet i linjen  $L$ . Vi låter  $N$  vara linjen som är ortogonal mot  $L$  och som går genom origo. Låt  $\vec{u}$  vara en riktningsvektor för  $L$ , och  $\vec{n}$  en riktningsvektor för  $N$ .

- (a) Vad är  $T(\vec{u})$ , och vad är  $T(\vec{n})$ ? **(1 p)**  
 (b) Bestäm egenvektorer och egenvärden till avbildningen  $T$ . **(1 p)**  
 (c) Skriv  $T(3\vec{u} + 4\vec{n})$  som en linjärkombination av  $\vec{u}$  och  $\vec{n}$ . **(2 p)**

*Var god vänd!*

## DEL C

7. Bestäm alla linjära avbildningar  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  som uppfyller följande två krav: **(4 p)**

(a) Vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgör en bas för nollrummet för  $T$ .

(b) Bildrummet för  $T$  är linjen med riktningsvektor  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

8. På Algebramuseet finns en projektionsmaskin. Om man stoppar in en vektor  $\vec{v}$  i  $\mathbb{R}^3$  och trycker på en knapp så matar maskinen ut den ortogonala projektionen av  $\vec{v}$  på ett (fixerat) tvådimensionellt delrum  $W$  till  $\mathbb{R}^3$ .

Maskinen börjar bli gammal och håller bara för två knapptryckningar till. Tyvärr går den inte att reparera så museets chefsingenjör vill i stället bygga en ny maskin med exakt samma funktion. Problemet är att hon inte vet vilket delrum  $W$  maskinen är byggd för.

Chefsingenjören är visserligen väldigt bra på linjär algebra, men räcker två knapptryckningar för att hon säkert ska kunna lista ut vad  $W$  är innan maskinen går sönder?

**(4 p)**

9. Låt  $A$  vara en symmetrisk  $4 \times 4$ -matris som har följande två egenskaper:

(a) Rangen till matrisen  $A$  är 2.

(b) Vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

är egenvektorer med egenvärdet 2.

Bestäm alla egenvektorer till  $A$ .

**(4 p)**



KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri**  
**Lösningsförslag till tentamen 2014-05-20**

---

DEL A

1. Planet  $P$  innehåller punkterna  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 3, 1)$  och  $(2, 2, 2)$ .
- (a) Bestäm en ekvation, på formen  $ax + by + cz + d = 0$ , för planet  $P$ . **(2 p)**
- (b) Bestäm en ekvation för det plan som är ortogonalt mot  $P$  och som innehåller linjen  $(x, y, z) = (t + 1, 2t, 1 - t)$ . **(2 p)**

*Lösning.* (a) Vi betecknar  $K = (1, 1, 0)$ ,  $L = (0, 3, 1)$  och  $M = (2, 2, 2)$ . Allmänt plan som passerar punkten  $K$  har ekvation

$$A(x - 1) + B(y - 1) + Cz = 0,$$

där vektoren av koefficienter  $(A, B, C)$  är en normalvektor till planet. Vi söker normalvektorn som kryssprodukt

$$\mathbf{n} = KL \times KM.$$

Vi har  $KL = (-1, 2, 1)$  och  $KM = (1, 1, 2)$ . Detta ger oss

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3, 3, -3).$$

Planets ekvationen blir  $3(x - 1) + 3(y - 1) + 3z = 0$  eller enklare  $x + y - z = 2$ .

(b) Sökta planet  $Q$  är parallellt med normalvektor  $\mathbf{n} = (3, 3, -3)$  till planet  $P$ . Dessutom är det parallellt också med linjens riktningsektorn  $\mathbf{r} = (1, 2, -1)$ . Vi får då normalvektorn  $\mathbf{N}$  till planet  $Q$  som kryssprodukt

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (3, 0, 3).$$

Ekvation av planet  $Q$  blir då  $3x + 3z + D = 0$ . För att bestämma konstanten  $D$  stoppar vi linjens koordinater  $x = t + 1$ ,  $y = 2t$ ,  $z = 1 - t$  till planets ekvation. Detta ger oss  $D = -6$  och ekvationen blir  $3x + 3z - 6 = 0$  eller enklare  $x + z = 2$ .

□

**Svar:**

- (a)  $x + y - z = 2$

(b)  $x + z = 2$

2. För varje givet tal  $a$  har vi följande ekvationssystem i tre okända  $x, y$  och  $z$ :

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z = 3 \\ -2x + 7y + 2z = 1 \\ 2x + y + (a^2 - 1)z = 1 \end{cases}$$

- (a) Avgör om  $(1, 1, 1)$  är med i lösningsmängden när  $a = 0$ . **(1 p)**  
 (b) Bestäm lösningsmängden när  $a = 2$ . **(1 p)**  
 (c) Bestäm för vilka värden på  $a$  som ekvationssystemet har en unik lösning, saknar lösning, respektive har oändligt många lösningar. **(2 p)**

*Lösning.* (a) För  $a = 0$  har vi systemet

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z = 3 \\ -2x + 7y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Substitutionen av  $x = 1, y = 1, z = 1$  i första ekvationen visar att  $(1, 1, 1)$  inte ligger i lösningsmängden.

(b) Vi substituerar  $a = 2$  och löser systemet

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z = 3 \\ -2x + 7y + 2z = 1 & E2 + E1 \\ 2x + y + 3z = 1 & E3 - E1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z = 3 \\ 16y + 6z = 4 \\ -8y - z = -2 & E2/2 + E3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 9y + 4z = 3 \\ 16y + 6z = 4 \\ 2z = 0. \end{cases}$$

Härav  $z = 0, y = 1/4, x = 3/8$ .

Systemet har exakt en lösning  $x = 3/8, y = 1/4, z = 0$ , dvs lösningsmängden består av exakt en punkt  $(3/8, 1/4, 0)$ . Alltså är lösningsmängden  $\{(3/8, 1/4, 0)\}$ .

(c) Låt  $A$  beteckna ekvationssystemets koefficientmatris. Ett kvadratisk ekvationssystem har exakt en lösning om och endast om  $\det(A) \neq 0$ . Vi beräknar

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 \\ -2 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & (a^2 - 1) \end{vmatrix}$$

vid radutveckling langs med tredje raden. Detta ger

$$2 \det \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + (a^2 - 1) \det \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Detta ger att

$$\det(A) = 2 \cdot (-10) - 1 \cdot (12) + (a^2 - 1)(32) = 32(a^2 - 2).$$

Ekvationssystemet har exakt en unik lösning när  $a \neq \pm\sqrt{2}$ . När vi insätter  $a = \pm\sqrt{2}$  då har vi att 2 gånger den tredje raden in total matrisen adderad till den andra raden, ger första raden. Det följer att totalmatrisen har rang 2, och att det finns oändligt många lösningar.

□

**Svar:**

- (a) Punkten  $(1, 1, 1)$  ligger inte i lösningsmängden.
- (b) Lösningsmängden är  $\{(3/8, 1/4, 0)\}$ , ( innehåller endast en punkt).
- (c) Ekvationssystemet har exakt en lösning när  $a \neq \pm\sqrt{2}$ . Oändligt många lösningar när  $a = \pm\sqrt{2}$ .



## 3. Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

och beräkna sedan  $A^{17}$ .

**(4 p)**

*Lösning. Eigenvärden:* Från den karakteristiska ekvationen

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

får vi två egenvärden  $\lambda_1 = -1$  och  $\lambda_2 = 1$

Motsvarande *egenvektorer* bestämmer vi med hjälp av ekvationen

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad \text{dvs} \quad \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

För  $\lambda_1 = -1$  har vi

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eller

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = t, x = -t$$

Vi väljer en egenvektor  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

På liknande sätt får vi att  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  är en egenvektor som svarar mot  $\lambda_2 = 1$

Matrisen har två linjärt oberoende egenvektorer och därmed kan diagonaliseras.

*Diagonalisering:*

Vi bildar matriserna

$$P = [\vec{v}_1 | \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och beräknar

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Då gäller

$$P^{-1}AP = D \quad \text{eller ekvivalent} \quad A = PDP^{-1}.$$

Nu beräknar vi potensen  $A^{17}$ .

$$\begin{aligned} A^{17} &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) = PD^{17}P^{-1} \\ &= PD^{17}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{17} & 0 \\ 0 & 1^{17} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

□

**Svar:**

$$A^{17} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

## DEL B

4. I  $\mathbb{R}^4$  har vi följande vektorer

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{u}_5 = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Delrummet  $V = \text{Span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$  har dimension tre.

- (a) Bestäm en bas för  $V$ . (1 p)  
 (b) Avgör om  $V^\perp = \text{Span}\{\vec{u}_5\}$ . (2 p)  
 (c) Skriv  $V$  som lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem. (1 p)

*Lösning.* (a) Eftersom det är givet att  $\dim V = 3$ , söker vi en bas av  $V$  som tre vektorer valda av vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ . Till exempel, försöker vi att ta tre första vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ . Det räcker att visa att dem är linjärt oberoende eftersom om det vore så då har deras linjära höljet dimension 3 och måste således sammanfalla med  $V$ .

Vi undersöker samband  $C_1\vec{u}_1 + C_2\vec{u}_2 + C_3\vec{u}_3 = 0$ . Det är ett homogent system av linjära ekvationer med matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Efter standard Gausselimination får vi trappstegmatris

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Systemet har icke-triviala lösningar vilket visar att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$  inte utgör en bas, dem är linjärt beroende!

Nästa försök är att ta vektorer  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$ . Analog undersökning av sambandet  $C_1\vec{u}_1 + C_2\vec{u}_2 + C_4\vec{u}_4 = 0$  visar att det ända möjliga lösningar  $C_1, C_2, C_4$  är  $C_1 = C_2 = C_4 = 0$  vilket visar att vektorerna  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$  är linjärt oberoende och dem utgör en bas av  $V$ .

(b) Man kollar först att alla vektorer i form  $\vec{v} = (-7t, 2t, 4t, t)$  är vinkelräta mot alla vektorer  $\vec{u}_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  genom att räkna direkt skalärprodukt  $\vec{v} \cdot \vec{u}_k$  (alla sådana skalärprodukter blir noll). Således alla sådana vektorer  $\vec{v}$  är vinkelräta också till hela  $V$  och de ligger i ortogonala komplementet  $V^\perp$ . Detta visar att en-dimensionellt underrum  $W = \{(-7t, 2t, 4t, t) : \text{godtyckliga } t\}$  är innehållet i ortogonala komplementet  $V^\perp$ .

Att underrummet  $W$  sammanfaller med  $V^\perp$  ser man med hjälp av dimensioner. Alla vektorer  $\vec{u}_k$  ligger i rum  $\mathbb{R}^4$  av fyra dimensioner. Det är givet i uppgiften att  $\dim V = 3$ .

Detta ger oss  $\dim V^\perp = 4 - 3 = 1$  d v s  $V^\perp$  har dimension 1. Men underrummet  $W$  har också dimension 1 vilket visar att  $W$  och  $V^\perp$  sammanfaller.

(c) Man kan t ex använda egenskap att  $V = (V^\perp)^\perp = W^\perp$ . Den visar att  $V$  består av dem vektorer som är vinkelräta mot alla vektorer i underrummet  $W$  d v s mot vektor  $(-7, 2, 4, 1)$ . Detta ger oss att  $V$  består av alla vektorer  $(x, y, z, t)$  som löser ekvationen  $-7x + 2y + 4z + t = 0$ .

□

**Svar:**

(a) T ex  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$ .

(b) Ja.

(c)  $-7x + 2y + 4z + t = 0$ .

5. Vid en laboration får två studenter följande mätvärden

$t$ (ms)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$ (mm)	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3

Mätutrustningen är inte speciellt tillförlitlig och för att få ut det mest av mätningarna bestämmer sig studenterna för att använda minsta kvadratmetoden för att få reda på vilket linjärt samband  $x = at + b$  som bäst passar de gjorda mätningarna. Den ena studenten hävdar att man skulle tjäna på att göra en substitution som leder till att man istället skriver sambandet som  $x = a(t - 5 \text{ ms}) + b$ .

- (a) Utför de räkningar som behövs för att bestämma det linjära sambandet, antingen med eller utan substitutionen. **(3 p)**  
 (b) Förklara varför det ena sättet leder till en lättare beräkning. **(1 p)**

*Lösning.* (a) Om vi använder substitutionen leder det till en förskjutning av  $t$ -värdena så att systemet kan skrivas som  $Ax = b$  där

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 1 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

För att få en minsta kvadratlösning till det överbestämda systemet löser vi normallekvationen, dvs  $A^T Ax = A^T b$ . Vi får då

$$\begin{bmatrix} 110 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Eftersom koefficientmatrisen är en diagonalmatris får vi direkt lösningen som  $a = 31/110 \approx 0,282$  och  $b = 20/11 \approx 1,82$ . Det linjära sambandet bör därmed vara

$$x = 31/110t + 20/11 - 5 \cdot 31/110 = 31/110t + 9/22.$$

Om man inte gör substitutionen får man istället

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi får då normalekvationen

$$\begin{bmatrix} 385 & 55 \\ 55 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 131 \\ 20 \end{bmatrix}$$

och vi kan lösa systemet med exempelvis Cramers regel eller med Gausselimination. Vi får då  $a = 31/110 \approx 0,282$  och  $b = 9/22 \approx 0,409$ . Det linjära sambandet bör därmed vara

- (b) I och med att koefficientmatrisen blir en diagonalmatris efter substitutionen är det lättare att lösa problemet på det viset. Man måste dock komma ihåg att återföra sambandet på den ursprungliga formen.

□

**Svar:**

- (a) Vi får sambandet  $x = 31/110t + 9/22$ .  
 (b) Det blir lättare att lösa normalekvationen efter substitutionen.

6. Låt  $L$  vara en linje genom origo i planet. Låt  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vara den linjära avbildning som speglar planet i linjen  $L$ . Vi låter  $N$  vara linjen som är ortogonal mot  $L$  och som går genom origo. Låt  $\vec{u}$  vara en riktningsvektor för  $L$ , och  $\vec{n}$  en riktningsvektor för  $N$ .
- (a) Vad är  $T(\vec{u})$ , och vad är  $T(\vec{n})$ ? (1 p)
- (b) Bestäm egenvektorer och egenvärden till avbildningen  $T$ . (1 p)
- (c) Skriv  $T(3\vec{u} + 4\vec{n})$  som en linjärkombination av  $\vec{u}$  och  $\vec{n}$ . (2 p)

*Lösning.* (a) Eftersom  $\vec{u}$ , som en riktningsvektor, är parallell med linjen  $L$  blir spegelbilden av  $\vec{u}$  lika med  $\vec{u}$ . Alltså  $T(\vec{u}) = \vec{u}$ .

Vektorn  $\vec{n}$  som är vinkelrät mot linjen har spegelbilden  $-\vec{n}$ . Därför  $T(\vec{n}) = -\vec{n}$ .

- (b) En vektor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  är en egenvektor till avbildningen  $T$  om det finns ett tal  $\lambda$  så att

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

Talet  $\lambda$  är i detta fall avbildningens egenvärde. Från första delen har vi

$$T(\vec{u}) = 1 \cdot \vec{u} \quad \text{och} \quad T(\vec{n}) = -1 \cdot \vec{n}$$

Alltså är  $\lambda_1 = 1$  och  $\lambda_2 = -1$  avbildningens egenvärden med motsvarande egenvektorer  $\vec{u}$  och  $\vec{n}$ . Vektorerna  $t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$  och  $s\vec{n}, s \in \mathbb{R}$  är också egenvektorer till  $T$  som svarar mot  $\lambda_1 = 1$ , respektive  $\lambda_2 = -1$ . (Detta ser vi enkelt: T ex.  $T(t\vec{u}) = tT(\vec{u}) = 1 \cdot t\vec{u}$  visar att  $t\vec{u}$ , för varje  $t$ , är en egenvektor med egenvärden 1).

En avbildning  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  kan ha maximalt 2 egenvärden (den karakteristiska ekvationen har grad 2 och, i vårt fall, har två rella enkla rötter 1 och -1) Med andra ord har vi funnit alla egenvärden. Både  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$  har algebraiska multipliciteten = 1. Förutom  $t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$  finns det inte andra egenvektorer tillhörande  $\lambda_1 = 1$  eftersom (dimensionen för egenrummet  $E_{\lambda_1} \leq$  (egenvärdes algebraiska multipliciteten) = 1).

Samma resonemang gäller för egenvektorer motsvarande  $\lambda_2 = -1$ .

Alltså har  $T$  följande egenvärden:

$\lambda_1 = 1$ , med motsvarande egenvektorer  $t\vec{u}, t \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 = -1$  med motsvarande egenvektorer  $s\vec{n}, s \in \mathbb{R}$

- (c)  $T(\vec{w}) = T(3\vec{u} + 4\vec{n}) =$  (enligt definitionen av en linjär avbildning)  
 $= 3T(\vec{u}) + 4T(\vec{n}) =$  (enligt första delen)  
 $= 3\vec{u} - 4\vec{n}$

□

**Svar:**

(a)  $T(\vec{u}) = \vec{u}, T(\vec{n}) = -\vec{n}$ .

(b)  $\lambda_1 = 1$  och  $\lambda_2 = -1$  är avbildningens egenvärden med motsvarande egenvektorer  $t\vec{u}$  och  $s\vec{n}$ .

(c)  $T(\vec{w}) = 3\vec{u} - 4\vec{n}$

## DEL C

7. Bestäm alla linjära avbildningar  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  som uppfyller följande två krav: **(4 p)**

(a) Vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

utgör en bas för nollrummet för  $T$ .

(b) Bildrummet för  $T$  är linjen med riktningsvektor  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

*Lösning.* Varje linjär avbildning bestäms med hur avbildar den vissa basvektorer. Vi väljer följande basvektorer i rummet  $\mathbb{R}^3$ :  $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$  och

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1).$$

Vi kollar att vektorer  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  och  $\vec{v}_3$  utgör en bas i  $\mathbb{R}^3$  genom t ex att räkna determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Varje vektor  $\vec{v}$  i rummet  $\mathbb{R}^3$  kan skrivas då som linjär kombination

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3.$$

Vektoren  $\vec{v}_3$  är vinkelrät mot  $\vec{v}_1$  och  $\vec{v}_2$  vilket ger oss att  $c_3\vec{v}_3$  är projektion av  $\vec{v}$  på linjen parallel med  $\vec{v}_3$  och således

$$c_3 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|^2} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_3}{3}.$$

Vi får då

$$T\vec{v} = c_1T\vec{v}_1 + c_2T\vec{v}_2 + c_3T\vec{v}_3.$$

Men  $T\vec{v}_1 = T\vec{v}_2 = \vec{0}$  enligt (a) i uppgiften och  $T\vec{v}_3 = C(0, 0, 1)$  enligt (b) i uppgiften (här  $C$  är någon konstant). Tillsammans får vi

$$T\vec{v} = C \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_3}{3} \cdot (0, 0, 1) = D(\vec{v} \cdot \vec{v}_3) (0, 0, 1)$$

(där  $D = C/3$  är en godtycklig konstant). Om  $\vec{v} = (x, y, z)$ , då får vi

$$T\vec{v} = (0, 0, D(-x - y + z)).$$

□

**Svar:**



(a)  $T\vec{v} = (0, 0, D(-x - y + z))$ , där  $\vec{v} = (x, y, z)$  och  $D$  är godtycklig konstant.

8. På Algebramuseet finns en projektionsmaskin. Om man stoppar in en vektor  $\vec{v}$  i  $\mathbb{R}^3$  och trycker på en knapp så matar maskinen ut den ortogonala projektionen av  $\vec{v}$  på ett (fixerat) tvådimensionellt delrum  $W$  till  $\mathbb{R}^3$ .

Maskinen börjar bli gammal och håller bara för två knapptryckningar till. Tyvärr går den inte att reparera så museets chefsingenjör vill i stället bygga en ny maskin med exakt samma funktion. Problemet är att hon inte vet vilket delrum  $W$  maskinen är byggd för.

Chefsingenjören är visserligen väldigt bra på linjär algebra, men räcker två knapptryckningar för att hon säkert ska kunna lista ut vad  $W$  är innan maskinen går sönder?

**(4 p)**

*Lösning.* Chefsingenjören tar två linjärt oberoende vektorer  $\bar{u}$  och  $\bar{v}$  i  $\mathbb{R}^3$  och använder de två knapptryckningarna till att ta reda på  $\bar{u}' = \text{proj}_W \bar{u}$  och  $\bar{v}' = \text{proj}_W \bar{v}$ . Om  $\bar{u}' = \bar{u}$  och  $\bar{v}' = \bar{v}$  ligger båda dessa vektorer i planet  $W$  och eftersom  $\bar{u}$  och  $\bar{v}$  är linjärt oberoende utgör de en bas för  $W$ ; därmed är  $W$  entydigt bestämd. Om  $\bar{u}' \neq \bar{u}$  så är differensen  $\bar{u} - \bar{u}' = \bar{u} - \text{proj}_W \bar{u}$  en normalvektor till  $W$  och om  $\bar{v}' \neq \bar{v}$  är  $\bar{v} - \bar{v}'$  en normalvektor. I båda fallen är  $W$  alltså entydigt bestämd.  $\square$

**Svar:** Ja, det räcker med två knapptryckningar.

9. Låt  $A$  vara en symmetrisk  $4 \times 4$ -matris som har följande två egenskaper:

- (a) Rang till matrisen  $A$  är 2.  
 (b) Vektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

är egenvektorer med egenvärdet 2.

Bestäm alla egenvektorer till  $A$ .

**(4 p)**

*Lösning.* Vi betecknar egenvektorer givna i (b) med  $\vec{w}_1 = (1, 2, 0, 1)$  och  $\vec{w}_2 = (0, 1, 1, 0)$ . Man ser lätt att dem två vektorerna är linjärt oberoende och således deras linjära höljet  $W$  har dimension 2. Alla vektorer i  $W$  har formen

$$\vec{w} = c\vec{w}_1 + d\vec{w}_2 = (c, 2c + d, d, c)$$

och alla dem är egenvektorer med egenvärdet 2. Detta visar att egenvärdet  $\lambda = 2$  har multiplicitet minst 2.

Enligt spektralsats så finns det någon ON bas av egenvektorer till matris  $A$ :  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ . I denna bas blir matrisen  $A$  en diagonalmatris med diagonala elementer  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ . Två första egenvärdena är  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ . Men eftersom rangen till  $A$  är 2 enligt (a) i uppgiften, så får vi  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ . Detta visar att underrum av egenvektorer som hör till egenvärdet 2 har dimension 2 och det sammanfaller med underrummet  $W$  erhållet tidigare. Annat underrum består av egenvektorer som hör till egenvärdet 0 och det är ortogonala komplementet till  $W$ .

För att bestämma ortogonala komplementet löser vi linjära systemet

$$\begin{cases} x + 2y + t = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Standard Gausselimination ger oss lösningar

$$(x, y, z, t) = (2a - b, -a, a, b)$$

där  $a, b$  är godtyckliga konstanter. Det är allmän form av egenvektorer som hör till egenvärdet 0.

□

**Svar:**

- (a) Egenvektorer som hör till egenvärdet  $\lambda = 2$  är  $(c, 2c + d, d, c)$ . Egenvektorer som hör till egenvärdet  $\lambda = 0$  är  $(2a - b, -a, a, b)$ . Här  $a, b, c, d$  är godtyckliga konstanter.