



KTH Teknikvetenskap

**SF1624 Algebra och geometri
Tentamen
Fredagen den 14 mars, 2014**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Roy Skjelnes

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. I rummet \mathbb{R}^3 har vi punkterna $P = (-3, -1, 4)$ och $Q = (2, 3, 3)$, samt linjen L_1 som ges av vektorerna på formen

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ -2t \end{bmatrix},$$

där t är en reell parameter.

- (a) Bestäm parameterformen för linjen L_2 som går genom P och Q . **(1 p)**
(b) Linjerna L_1 och L_2 har en gemensam punkt. Bestäm denna skärningspunkt. **(1 p)**
(c) Bestäm en ekvation för planet H som innehåller L_1 och L_2 . **(2 p)**
2. (a) Bestäm ett andragradspolynom $p(x) = a + bx + cx^2$ vars graf $y = p(x)$ går genom punkterna $(-1, 4)$, $(1, 2)$ och $(2, 7)$. **(3 p)**
(b) Hur många sådana polynom finns det? **(1 p)**

3. Den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är bestämd av

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T \left(\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enhetskvadraten Ω har hörn $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$, och avbildas genom T på en parallelogram $T(\Omega)$.

- (a) Bestäm matrisen för avbildningen T . **(1 p)**
(b) Visa att bildrummet till T är \mathbb{R}^2 . **(1 p)**
(c) Rita upp $T(\Omega)$, och bestäm dess area. **(2 p)**

DEL B

4. Följande tre vektorer i \mathbb{R}^4 ,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

är ortogonala. Vi låter V vara deras linjära hölje, $V = \text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

(a) Bestäm en ortonormal bas för V . **(1 p)**

(b) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ på delrummet V . **(2 p)**

(c) Bestäm en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vars nollrum är V . **(1 p)**

5. Planet W i \mathbb{R}^3 är alla vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t - 2s \\ 2t + 2s \end{bmatrix},$$

där s och t är reella tal.

(a) Beskriv W som lösningmängden till ett system av linjära ekvationer. **(2 p)**

(b) Bestäm alla vektorer i W som har längden 1 och som är ortogonala mot vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **(2 p)**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. En linjär avbildning $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ har egenvärdena $-1, 0, 1$ och 2 . Visa att det finns ett plan i $V \subseteq \mathbb{R}^4$ där alla vektorer avbildas på sig själva av T^2 . **(4 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. I \mathbb{R}^4 har vi vektorerna

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har att $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}\}$ en bas för $V \subseteq \mathbb{R}^4$, och $L: V \rightarrow V$ är en linjär avbildning. Vi vet att med avseende på basen \mathcal{B} så ges avbildningen L av matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm koordinatmatrisen till \vec{x} med avseende på basen \mathcal{B} . **(1 p)**
(b) Bestäm övergångs matrisen (basbyte) från basen \mathcal{B} till basen $\{\vec{x}, \vec{y}\}$. **(2 p)**
(c) Bestäm egenvektorerna för L . **(1 p)**
8. Mittpunkterna på sidorna i en triangel är punkterna $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 1)$ och $(-3, 2, 3)$. Bestäm triangelns hörn. **(4 p)**

9. Låt L vara lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Bestäm alla delrum av \mathbb{R}^3 som innehåller L . **(4 p)**



KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2014-03-14

DEL A

1. I rummet \mathbb{R}^3 har vi punkterna $P = (-3, -1, 4)$ och $Q = (2, 3, 3)$, samt linjen L_1 som ges av vektorerna på formen

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}t \\ \frac{1}{2}t \\ -2t \end{bmatrix},$$

där t är en reell parameter.

- (a) Bestäm parameterformen för linjen L_2 som går genom P och Q . **(1 p)**
(b) Linjerna L_1 och L_2 har en gemensam punkt. Bestäm denna skärningspunkt. **(1 p)**
(c) Bestäm en ekvation för planet H som innehåller L_1 och L_2 . **(2 p)**

Lösning. (a) Linjen genom P och Q har en riktningsvektor som är parallell med \overrightarrow{PQ} och vi får

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - (-3) \\ 3 - (-1) \\ 3 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom linjen L_2 går genom P kan vi skriva den på parameterform som $\overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ dvs

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Vi söker en lösning till ekvationen

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem i de två obekanta s och t och vi kan använda Gausselimination på dess totalmatris och får då

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -5 & -3 \\ \frac{1}{2} & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} 2r_2 \\ r_1 - 3r_2 \\ r_3 + 4r_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -8 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Därmed har vi att $s = -2$ och $t = 0$ ger den enda lösningen och skärningspunkten är $(-3, -1, 4)$, dvs punkten P .

- (c) Vi kan bestämma en normalvektor till planet som innehåller linjerna med hjälp av vektorprodukten om de inte är parallella. Vi har

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-4) - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 - 5 \cdot (-4) \\ 5 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 17 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Planets ekvation kan därmed skrivas $15x - 17y + 7z = d$ för någon konstant d och vi kan ta reda på d genom att sätta in en punkt, exempelvis origo som ligger på linjen L , och får då $d = 15 \cdot 0 - 17 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 0$. Alltså är planets ekvation $15x - 17y + 7z = 0$. \square

Svar:

(a) Linjen L_2 ges av $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) Skärningen mellan linjerna är punkten $P = (-3, -1, 4)$.

(c) Planet som innehåller båda linjerna har ekvation $15x - 17y + 7z = 0$.

2. (a) Bestäm ett andragradspolynom $p(x) = a + bx + cx^2$ vars graf $y = p(x)$ går genom punkterna $(-1, 4)$, $(1, 2)$ och $(2, 7)$. **(3 p)**
 (b) Hur många sådana polynom finns det? **(1 p)**

Lösning. (a) Eftersom kurvan ska gå genom de tre punkterna måste vi ha att $p(-1) = 4$, $p(1) = 2$ och $p(2) = 7$, dvs

$$\begin{cases} a + b \cdot (-1) + c \cdot (-1)^2 = 4 \\ a + b \cdot 1 + c \cdot 1^2 = 2 \\ a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 = 7 \end{cases}$$

Vi kan använda Gausselimination på totalmatrisen för detta linjära ekvationssystem och får då

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{c} r_1 + \frac{1}{2}r_2 \\ \frac{1}{2}r_2 \\ r_3 - \frac{3}{2}r_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 - \frac{1}{3}r_3 \\ r_2 \\ \frac{1}{3}r_3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Alltså kan vi se att koefficienterna $a = 1$, $b = -1$ och $c = 2$ är en lösning till systemet och därmed är det sökta polynomet $p(x) = 1 - x + 2x^2$.

- (b) I och med att vi fick en ledande etta i varje kolonn i koefficientmatrisen finns en unik lösning till det linjära ekvationssystemet och därmed finns precis ett andragradspolynom $p(x)$ som uppfyller kraven. □

Svar:

- (a) Polynomet $p(x) = 1 - x + 2x^2$ uppfyller kraven
 (b) Det finns bara ett sådant polynom.

3. Den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ är bestämd av

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Enhetskvadraten Ω har hörn $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$, och avbildas genom T på en parallelogram $T(\Omega)$.

- (a) Bestäm matrisen för avbildningen T . (1 p)
 (b) Visa att bildrummet till T är \mathbb{R}^2 . (1 p)
 (c) Rita upp $T(\Omega)$, och bestäm dess area. (2 p)

Lösning. (a) Om A är standardmatrisen för T har vi enligt villkoren att

$$A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

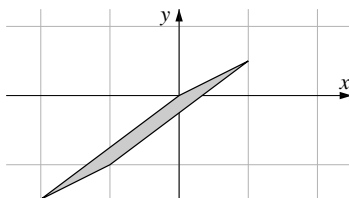
vilket innebär att A är inversmatris till matrisen $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$. Vi kan bestämma den genom exempelvis Gauss-Jordanelimination och får då

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 - 3r_1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 + r_2 \\ \frac{1}{2}r_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Alltså ges standardmatrisen för T av

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Eftersom de båda standardbasvektorerna ligger i bildrummet till T måste bildrummet vara hela \mathbb{R}^2 .
 (c) De båda kolonnvektorerna i A bildar sidor i parallelogrammen $T(\Omega)$ som har sitt fjärde hörn i $T(1, 1) = (-1, -1)$. Parallelogrammens area ges av beloppet av deter-



FIGUR 1. Området $T(\Omega)$

minanten av matrisen A , dvs av $\left| -2 \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 \right| = \left| -1 + \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2}$

□

Svar:

(a) Standardmatrisen för T är $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) Se ovan.

(c) Arealen är $1/2$ areaenhet.

DEL B

4. Följande tre vektorer i \mathbb{R}^4 ,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

är ortogonala. Vi låter V vara deras linjära hölje, $V = \text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

(a) Bestäm en ortonormal bas för V . (1 p)

(b) Bestäm projektionen av vektorn $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ på delrummet V . (2 p)

(c) Bestäm en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vars nollrum är V . (1 p)

Lösning. (a) En ortonormal bas består av ortogonala vektorer av längden 1. För att \vec{u} , \vec{v} , och \vec{w} är redan ortogonala. Därmed bildar vektorerna $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, $\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$, och $\frac{1}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$ en ortonormal bas till V .

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

Alltså kan vi konstatera att följande vektorer bildar en ortonormal bas till V :

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

(b) Låt \vec{z} vara en vektor i \mathbb{R}^4 . Betrakta följande vektor:

$$\vec{t} = \frac{\vec{z} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u} + \frac{\vec{z} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\vec{v} + \frac{\vec{z} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}}\vec{w}$$

Observera att \vec{t} ligger i V och att $(\vec{t} - \vec{z}) \cdot \vec{u} = (\vec{t} - \vec{z}) \cdot \vec{v} = (\vec{t} - \vec{z}) \cdot \vec{w} = 0$. Vi kan

konstatera att $\text{proj}_V(\vec{z}) = \vec{t}$. Låt $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Vi har följande likheter:

$$\begin{aligned} \vec{z} \cdot \vec{u} &= -2 + 8 = 6, & \vec{u} \cdot \vec{u} &= 3, \\ \vec{z} \cdot \vec{v} &= 2 + 1 = 3, & \vec{v} \cdot \vec{v} &= 3, \\ \vec{z} \cdot \vec{w} &= -2 - 16 = -18, & \vec{w} \cdot \vec{w} &= 6. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(\vec{z}) = \vec{t} &= \frac{\vec{z} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} + \frac{\vec{z} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} + \frac{\vec{z} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} \\ &= \frac{6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-18}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (c) Kravet på avbildningen T är att matrisens radrum ska vara det ortogonala komplementet till V . Därför börjar vi med att hitta det ortogonala komplementet till V , dvs alla vektorer som är ortogonala mot hela V .

Det ortogonala komplementet består av lösningarna \vec{x} till systemet $\vec{x} \cdot \vec{u} = \vec{x} \cdot \vec{v} = \vec{x} \cdot \vec{w} = 0$, dvs

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Genom Gausselimination får vi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

Alltså är $x_4 = 0$, $x_3 = t$ för en parameter t . Den andra ekvationen $-2x_2 + x_3 - x_4 = 0$, ger att $x_2 = \frac{x_3 - x_4}{2} = \frac{t}{2}$ och den första ekvationen ger $x_1 = -x_2 - x_4 = -\frac{t}{2}$.

Alltså är det ortogonala komplementet

$$V^\perp = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Det betyder att nollrummet till följande matris är lika med V

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och att funktionen $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, som ges av denna matris, har V som nollrum, $\ker(T) = V$.

$$T \left(\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -t_1 + t_2 + 2t_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

□

Svar:

$$(a) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1\sqrt{6} \\ 0 \\ -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$(b) \text{proj}_V \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$(c) T \left(\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -t_1 + t_2 + 2t_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Planet W i \mathbb{R}^3 är alla vektorer på formen

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t - 2s \\ 2t + 2s \end{bmatrix},$$

där s och t är reella tal.

(a) Beskriv W som lösningmängden till ett system av linjära ekvationer. **(2 p)**

(b) Bestäm alla vektorer i W som har längden 1 och som är ortogonala mot vektorn **(2 p)**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning. (a) Alla vektorer i W kan skrivas som

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vilket betyder att W är ett plan i \mathbb{R}^3 och att

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

För att beskriva planet med hjälp av ett ekvationssystem behövs bara en ekvation och vi kan hitta en normalvektor till planet genom vektorprodukten.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vektorn \vec{v} är ortogonal till båda $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ som betyder att \vec{v} är normal vektor till W . Alltså ges W av ekvationen $8x - 2y - 2z = 0$.

(b) Vi ombeds att bestämma alla vektorer $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ så att:

- $\|\vec{w}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$,
- \vec{w} ligger i W , som betyder att $x = t$, $y = 2t - 2s$ och $z = 2t + 2s$, där s och t är reella tal.

- \vec{w} är ortogonal till $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som ges $x + y + z = 0$.

Ekvationen $x + y + z = 0$ ger $t + (2t - 2s) + (2t + 2s) = 0$, dvs $5t = 0$. Alltså har vi att $t = 0$. När vi sätter in detta i ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ får vi $0^2 + 4s^2 + 4s^2 = 1$, och därmed $s = \pm 1/\sqrt{8}$. Det betyder att följande två vektorer uppfyller kraven:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2/\sqrt{8} \\ 2\sqrt{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{8} \\ -2/\sqrt{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

□

Svar:

(a) $8x - 2y - 2z = 0$

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

6. En linjär avbildning $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ har egenvärdena $-1, 0, 1$ och 2 . Visa att det finns ett plan i $V \subseteq \mathbb{R}^4$ där alla vektorer avbildas på sig själva av T^2 . **(4 p)**

Lösning. Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, och \vec{v}_4 vara egenvektorerna till T som motsvarar egenvärdena $-1, 0, 1$ och 2 . För egenvärdena är olika, vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, och \vec{v}_4 är linjärt oberoende.

Observera att:

$$T^2(\vec{v}_1) = T(T(\vec{v}_1)) = T(-\vec{v}_1) = -T(\vec{v}_1) = -(-\vec{v}_1) = \vec{v}_1$$

$$T^2(\vec{v}_3) = T(T(\vec{v}_3)) = T(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$$

Alltså, alla vektorer $\vec{v} = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_3$ i planet $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$ avbildas genom T^2 på sig själva:

$$T^2(t\vec{v}_1 + s\vec{v}_3) = tT^2(\vec{v}_1) + sT^2(\vec{v}_3) = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_3$$

□

Svar: Vektorerna i planet som spänns av egenvektorer till T med egenvärden 1 och -1 avbildas på sig själva av T^2 .

DEL C

7. I \mathbb{R}^4 har vi vektorerna

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi har att $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}\}$ en bas för $V \subseteq \mathbb{R}^4$, och $L: V \rightarrow V$ är en linjär avbildning. Vi vet att med avseende på basen \mathcal{B} så ges avbildningen L av matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm koordinatmatrisen till \vec{x} med avseende på basen \mathcal{B} . **(1 p)**
 (b) Bestäm övergångs matrisen (basbyte) från basen \mathcal{B} till basen $\{\vec{x}, \vec{y}\}$. **(2 p)**
 (c) Bestäm egenvektorerna för L . **(1 p)**

Lösning. a) Vi vill bestämma skalärer a och b sådana att $\vec{x} = a\vec{e} + b\vec{f}$. Detta ger ett ekvationssystem i två okända, men med fyra ekvationer. Vi vet att lösningen är unik, och bryr oss därmed om bara två av dessa ekvationer. De två sista koordinaterna ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi löser denna ekvation genom att multiplicera med inversen $\frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, vilket ger

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Koordinatmatrisen för \vec{x} med avseende på basen \mathcal{B} blir därmed

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

b) För att bestämma basbytesmatrisen från basen \mathcal{B} till basen $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ måste vi uttrycka \vec{e} och \vec{f} i den andra basen. Vi noterar att vektorn \vec{y} har en nolla i tredje koordinat. Ekvationen $\vec{e} = a\vec{x} + b\vec{y}$ har därmed lösningen $a = 1$, och det följer därmed att $b = 4$. På samma sätt läser vi av att $\vec{f} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$. Den sökta övergångsmatrisen är

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Med avseende på basen \mathcal{B} ges den linjära avbildningen av en diagonal matris. Detta betyder att baserna \vec{e} och \vec{f} är egenvektorer. De sökta egenvektorerna är

$$\begin{bmatrix} 5t \\ 9t \\ 2t \\ 5t \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 5s \\ 8s \\ 4s \\ 5s \end{bmatrix}$$

med nollskillda tal s och t .

□

Svar:

(a) Koordinatmatris $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(b) Övergångsmatris $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(c) Egenvektorer är $t\vec{e}$ och $s\vec{f}$, nollskillda skalärer.

- (d) Mittpunkterna på sidorna i en triangel är punkterna $(1, 2, 3)$, $(-2, 3, 1)$ och $(-3, 2, 3)$. Bestäm triangelns hörn. **(4 p)**

Lösning. Låt $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-2, 3, 1)$ och $E = (-3, 2, 3)$ vara de givna mittpunkterna. Om A , B och C är triangelns hörn får vi att

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} \\ \vec{OQ} &= \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC} \\ \vec{OR} &= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OC}\end{aligned}$$

Om vi lägger ihop dessa ekvationer får vi

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu få fram hörnen genom att $\vec{OA} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 2 \cdot \vec{OQ}$, etc. Därmed får vi

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \\ \vec{OB} &= \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

och

$$\vec{OC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså är triangelns hörn $A = (0, 1, 5)$, $B = (2, 3, 1)$ och $C = (-6, 3, 1)$. □

Svar: Triangelns hörn är $A = (0, 1, 5)$, $B = (2, 3, 1)$ och $C = (-6, 3, 1)$.

(e) Låt L vara lösningsmängden till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Bestäm alla delrum av \mathbb{R}^3 som innehåller L . (4 p)

Lösning. Hela \mathbb{R}^3 är ett delrum som innehåller L . De två ekvationerna beskriver två plan som inte är parallella. Alltså skär de varandra i en linje. Eftersom inget av planen går genom origo kan inte heller skärningen gå genom origo. Om delrummet inte är hela \mathbb{R}^3 kommer det därmed att behöva vara tvådimensionellt och ges av en enda ekvation. Denna ekvation behöver vara en linjärkombination av de bägge givna ekvationerna och eftersom origo ligger i delrummet måste konstanttermen vara noll. Alltså måste ekvationen ges av den andra ekvationen minus två gånger den första, dvs av $-3x + 5y - z = 0$.

Ett alternativ är att se att ett delrum som innehåller två punkter på linjen måste innehålla hela linjen. Gausselimination på totalmatrisen ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} r_2 \\ r_1 - 2r_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{c} r_1 + \frac{1}{4}r_2 \\ r_2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

och med parametern t får vi $z = t$, $y = 3/4 - t/4$ och $x = 5/4 - 3t/4$. Därmed ligger punkterna $(5/4, 3/4, 0)$ och $(1/2, 1/2, 1)$ på linjen. Eftersom delrummet är slutet under multiplikation med skalär måste även punkterna $(5, 3, 0)$ och $(1, 1, 2)$ ligga i delrummet. Vi kan få en normalvektor till delrummet med hjälp av vektorprodukten, dvs

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och vi får återigen en ekvation för planet som $3x - 5y + z = 0$. □

Svar: Det finns två sådana delrum; hela \mathbb{R}^3 och delrummet som ges av ekvationen $-3x + 5y - z = 0$.
